Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 13
08.07.2010

Abgabe: Donnerstag, 15.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 36: (Programmieraufgabe, Ausgleichsproblem)
Gegeben seien m Datenpaare $(t_k, s_k)_{k=1,\ldots,m}$, die wie folgt konstruiert werden:

$$t_k = \frac{2\pi(k-1)}{m-1}, \quad s_k = \frac{t_k^2 \sin(4t_k)}{10}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad m = 100.$$

(a) Bestimmen Sie zu diesen Daten das Ausgleichspolynom vom Grad 19, d. h.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i t^{i-1} \quad \text{mit} \quad p = 20$$

durch

(i) Lösen der Normalgleichung

$$A^T A y = A^T b.$$

Geben Sie auch die Kondition der Gramschen Matrix $A^T A$ aus (in MATLAB `cond`-Befehl).

(ii) Lösen des Ausgleichsproblems unter Verwendung der QR-Zerlegung. Hierbei können Sie auf die MATLAB-Funktion `qr` zurückgreifen.

(b) Geben Sie jeweils die Minimal- und Standardabweichung aus.

(c) Plotten Sie beide Ausgleichsfunktionen zusammen mit den Messdaten in eine Abbildung.

(d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

(6 Punkte)

(e) **Zusatz 1**: Implementieren Sie die QR-Zerlegung nach Householder und plotten Sie die Lösung zusammen mit denen aus Aufgabenteil (c).

(3 Bonuspunkte)

(f) **Zusatz 2**: Berechnen Sie das Interpolationspolynom (für $m = 20$, $p = 20$) sowie das Ausgleichspolynom (für $m = 100$, $p = 20$) jeweils vom Grad 19 mit der NUMLAB-GUI: Interpolation und erzeugen Sie einen Screenshot. Mit welcher Methode löst die GUI das Ausgleichsproblem?

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 37: (Nicht-Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ nicht-singulär und seien zwei Zerlegungen

$$A = Q_1 R_1 \quad \text{und} \quad A = Q_2 R_2$$

mit orthogonalen Matrizen Q_1, Q_2 und rechten oberen Dreiecksmatrizen R_1, R_2 gegeben. Zeigen Sie:

$$\exists\, D \in \mathbb{R}^{m,m} \text{ Diagonalmatrix mit } |D_{i,i}| = 1\ \forall\, i = 1, \ldots, m : \begin{cases} (1)\text{: } Q_1 = Q_2 D \\ \text{und} \\ (2)\text{: } R_1 = D R_2. \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 38: (Normalgleichung bezüglich w-Norm)
Gegeben sei ein Vektor $w = (w_1, \ldots, w_m)^T \in \mathbb{R}^m$ mit $w_i > 0$ für $i = 1, \ldots, m$.

(a) Weisen Sie nach, dass durch

$$\|x\|_w = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

eine Norm im $\mathbb{R}^m$ definiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass das lineare Ausgleichsproblem bezüglich dieser gewichteten Norm

$$\|Ay - b\|_w \stackrel{!}{=} \text{Minimum über } y \in \mathbb{R}^p$$

für ein gegebenes $b \in \mathbb{R}^m$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,p}$, $m \geqslant p$ mit $\operatorname{Rang}(A) = p$ genau eine Lösung besitzt.

(c) Geben Sie die zugehörige Normalgleichung an.

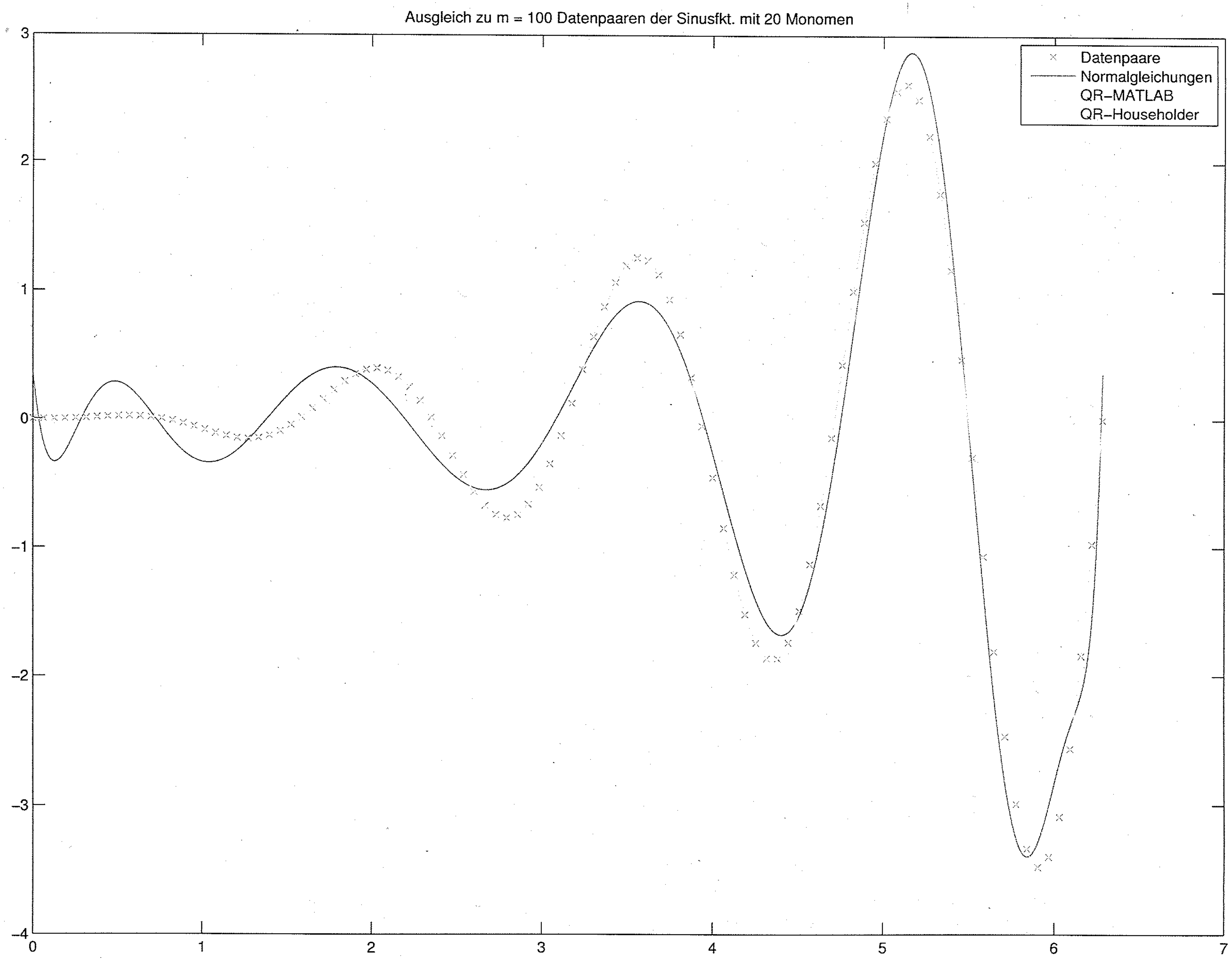
(6 Punkte)

```
function aufgabe36

    m=100;
    t=(0:2*pi/(m-1):2*pi)';
    s=t.^2.*sin(4*t)./10;
    ausgleich = @(t,a) f(t,a);
    p=20;                        % d.h. Polynom ist vom Grad p-1 (!!!)
    A=zeros(length(t),p);
    for i=0:p-1
        A(:,i+1)=t.^i;
    end
    [m,p]=size(A);

    % ------------------------------
    % |  Aufgabenteil (a) (i)      |
    % |          und (b) fuer (i)  |
    % ------------------------------
    y     = (A'*A)\(A'*s);       % Loesung der Normalengleichung
                                 % A^{T}Ay=A^{T}b
    kond  = cond(A'*A);          % Kondition der Gramschen Matrix A^{T}*A
    rho   = norm(A*y-s,2);       % Minimalabweichung ||A*yo-b||_2
    delta = 1/sqrt(m-p)*rho;     % Standabweichung (1/sqrt(m-p))*rho

    fprintf('\nMittels LR-Zerlegung der Normalgleichungen:\n');
    fprintf('-------------------------------------------\n');
    fprintf('Kondition von A^T A = %5.6f\n', kond);
    fprintf('Die Minimalabweichung  betraegt rho    = ||A*y-s||_2         = %2.6
f\n', rho);
    fprintf('Die Standardabweichung betraegt delta = (m-p)^(-1/2) * rho = %2.6
f\n', delta);

    % ----------------------------
    % |  Aufgabenteil (c) fuer (i) |
    % ----------------------------
    figure
    plot(t,s,'xr');                               % Plot: Messdaten
    hold on
    tplot=(min(t):0.0001:max(t))';
    plot(tplot,ausgleich(tplot,y),'b');           % Plot: Ausgleichsfunktion
    hold on

    % ------------------------------
    % |  Aufgabenteil (a) (ii)     |
    % |          und (b) fuer (ii) |
    % ------------------------------
    % MATLAB-QR-Zerlegung (vgl. Skript: Algorithmus auf Seite 197-198)
    [Q,R] = qr(A);                 % 1. Schritt: Zerlege A=QR
    qtb   = Q'*s;                  % 2. Schritt: Berechne Q^{T}b=:[bo;bu]
    y     = R(1:p,1:p)\qtb(1:p);   % 3. Schritt: Loese Ro*y=bo
    rho   = norm(qtb(p+1:end),2);  % Minimalabweichung ||A*yo-b||_2
    delta = 1/sqrt(m-p)*rho;       % Standabweichung (1/sqrt(m-p))*rho

    fprintf('\nMittels MATLAB-QR-Zerlegung:\n');
    fprintf('----------------------------\n');
    fprintf('Die Minimalabweichung  betraegt rho    = ||A*y-s||_2         = %2.6
```

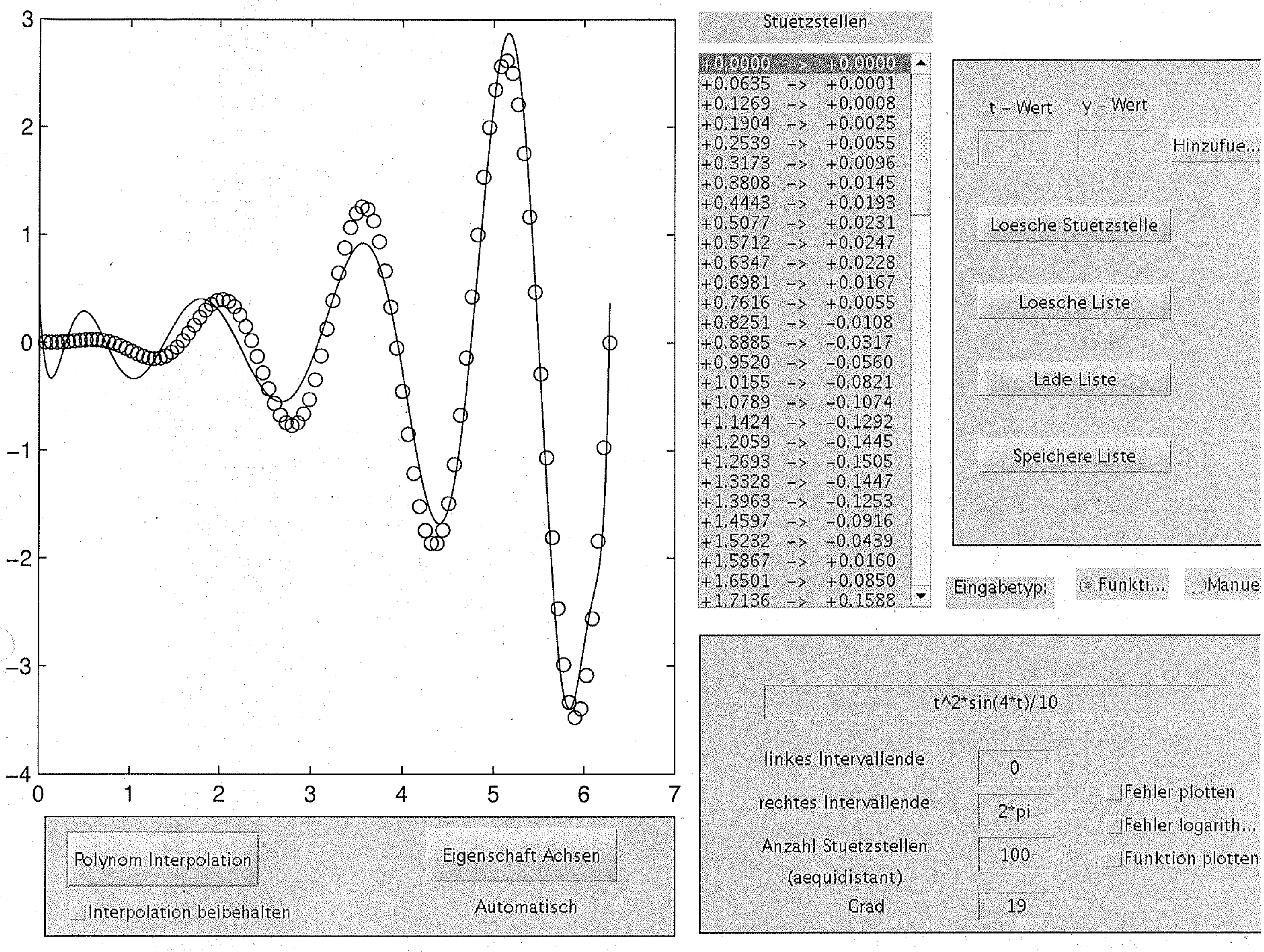
```
f\n', rho);
    fprintf('Die Standardabweichung betraegt delta = (m-p)^(-1/2) * rho = %2.6↙
f\n', delta);

    % --------------------------------
    % | Aufgabenteil (c) fuer (ii) |
    % --------------------------------
    tplot=min(t):0.0001:max(t);
    plot(tplot,ausgleich(tplot,y(1:p)),'g-');
    hold on

    % --------------------
    % | Aufgabenteil (f)  |
    % --------------------
    % Mittels Householder-QR-Zerlegung (vgl. Skript: Seite 203)
    [B,alp,bet] = QRZerlegung(A);
    R=B(1:p,1:p);
    for j=1:p
        R(j+1:p,j)=zeros(p-j,1);
    end
    [b,qtb] = QRAusgleich(B,alp,bet,s);
    for i=1:p
        R(i,i)=alp(i); R(i,i+1:p) = B(i,i+1:p);
    end

    rho   = norm(b(p+1:m),2);      % Minimalabweichung ||A*yo-b||_2
    delta = 1/sqrt(m-p)*rho;       % Standabweichung (1/sqrt(m-p))*rho

    fprintf('\nMittels Householder-QR-Zerlegung:\n');
    fprintf('---------------------------------\n');
    fprintf('Die Minimalabweichung betraegt rho   = ||A*y-s||_2        = %2.6↙
f\n', norm(b(p+1:m),2));
    fprintf('Die Standardabweichung betraegt delta = (m-p)^(-1/2) * rho = %2.6↙
f\n', delta);
    tplot=min(t):0.0001:max(t);
    plot(tplot,ausgleich(tplot,b(1:p)),'c--');   % Plot: Ausgleichsfunktion
    hold on;
    legend('Datenpaare', 'Normalgleichungen','QR-MATLAB','QR-Householder');
    title(char(['Ausgleich zu m = ', int2str(m), ' Datenpaaren der Sinusfkt.↙
mit', int2str(p), ' Monomen']));
    hold off;
end

function [A,alp,bet]=QRZerlegung(A)
%QRZERLEGUNG Berechnet zu einer gegenenen Matix A die Zerlegung A=QR, wobei
%           Q eine orthogonale Matrix und R eine rechte obere Dreiecks-
%           matrix ist (vgl. Skript: Algorithmus auf Seite 202).
%   A (input)   : Matrix A
%   A (output)  : In A steht die rechte obere Dreiecksmatrix R mit
%                 A=QR=(S_1^(-1)*...*S_p^(-1))*R
%   alp         : alpha (dient zur Rekunstruktion von Q)
%   bet         : beta (dient zur Rekonstruktion von Q)

    [m,p] = size(A);
    alp   = zeros(p,1);
```

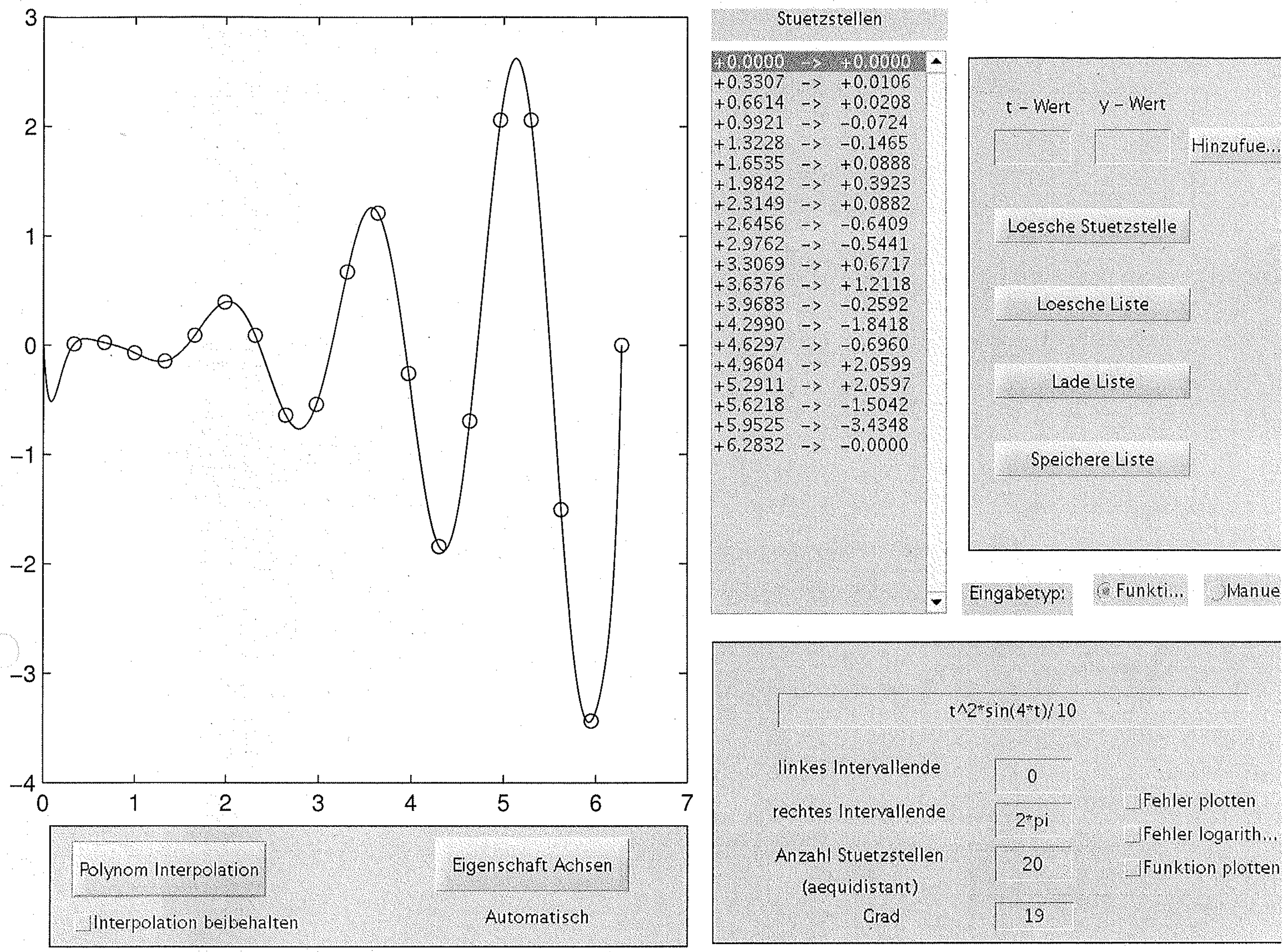
```
    bet   = zeros(p,1);

    for k=1:p
        sigma = norm(A(k:m,k),2);
        if sigma==0
            alp(k) = 0;
            bet(k) = 0;
        else
            alp(k) = -sign(A(k,k))*sigma;
            bet(k) = 1/(sigma*(abs(A(k,k))+sigma));
            A(k,k) = A(k,k)-alp(k);
            for j=k+1:p
                rho      = bet(k) * A(k:m,k)'*A(k:m,j);
                A(k:m,j) = A(k:m,j)-rho*A(k:m,k);
            end
        end
    end
end

function [y,qtb] = QRAusgleich(A,alp,bet,b)
%QRAusgleich Berechnet die Loesung des Ausgleichsproblems mit der
%            QR-Zerlegung (vgl. Skript: Algorithmus auf Seite 197-198).
%    A    : Matrix A
%    alp  : alpha (dient zur Rekonstruktion von Q)
%    bet  : beta (dient zur Rekonstruktion von Q)
%    b    : rechte Seite
%    y    : Loesung des Ausgleichsproblems
%    qtb  : Ergebnis von Q^{T}*b

    [m,p] = size(A);
    % ---------------------------------------------------------
    % |  2. Schritt: (Berechnung von Q^{T}*b =: [bo;bu])     |
    % ---------------------------------------------------------
    for k=1:p
        rho    = bet(k) * A(k:m,k)'*b(k:m);
        b(k:m) = b(k:m) - rho*A(k:m,k);
    end
    qtb=b;
    % -----------------------------------------------------------------
    % |  3. Schritt: (Loese Ro y = bo durch Rueckwaertsaufloesung)   |
    % -----------------------------------------------------------------
    for k=p:-1:1
        b(k) = b(k) - A(k,k+1:p)*b(k+1:p);
        b(k) = b(k) / alp(k);
    end
    y=b;
end

function y=f(t,a)
%F Die Funktion f berechnet die Auswertung der Daten bei einer "linearen
%  Ansatzfunktion" (vgl. Skript: Seite 187)
%    t  : Stelle, an der die Funktion ausgewertet werden soll
%    a  : Parameter
%    y  : Funktionswert
    p=length(a);
```

```
    y=zeros(size(t));
    for i=1:p
        y=y+a(i)*t.^(i-1);
    end
end
```


Ausgleich zu m = 100 Datenpaaren der Sinusfkt. mit 20 Monomen
Datenpaare
Normalgleichungen
QR–MATLAB
QR–Householder
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4
5
6
7

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.488508e-36.
> In aufgabe36 at 18

Mittels LR-Zerlegung der Normalgleichungen:
------------------------------------------
Kondition von A^T A = 72487816765448531400705368391680 0.000000
Die Minimalabweichung  betraegt rho   = ||A*y-s||_2         = 2.412504
Die Standardabweichung betraegt delta = (m-p)^(-1/2) * rho = 0.269726

Mittels MATLAB-QR-Zerlegung:
---------------------------
Die Minimalabweichung  betraegt rho   = ||A*y-s||_2         = 0.018308
Die Standardabweichung betraegt delta = (m-p)^(-1/2) * rho = 0.002047

Mittels Householder-QR-Zerlegung:
--------------------------------
Die Minimalabweichung  betraegt rho   = ||A*y-s||_2         = 0.018307
Die Standardabweichung betraegt delta = (m-p)^(-1/2) * rho = 0.002047
```


3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4
5
6
7
Stuetzstellen
+0.0000 -> +0.0000
+0.0635 -> +0.0001
+0.1269 -> +0.0008
+0.1904 -> +0.0025
+0.2539 -> +0.0055
+0.3173 -> +0.0096
+0.3808 -> +0.0145
+0.4443 -> +0.0193
+0.5077 -> +0.0231
+0.5712 -> +0.0247
+0.6347 -> +0.0228
+0.6981 -> +0.0167
+0.7616 -> +0.0055
+0.8251 -> -0.0108
+0.8885 -> -0.0317
+0.9520 -> -0.0560
+1.0155 -> -0.0821
+1.0789 -> -0.1074
+1.1424 -> -0.1292
+1.2059 -> -0.1445
+1.2693 -> -0.1505
+1.3328 -> -0.1447
+1.3963 -> -0.1253
+1.4597 -> -0.0916
+1.5232 -> -0.0439
+1.5867 -> +0.0160
+1.6501 -> +0.0850
+1.7136 -> +0.1588
t – Wert
y – Wert
Hinzufue...
Loesche Stuetzstelle
Loesche Liste
Lade Liste
Speichere Liste
Eingabetyp:
Funkti...
Manue
t^2*sin(4*t)/10
linkes Intervallende
0
rechtes Intervallende
2*pi
Anzahl Stuetzstellen
(aequidistant)
100
Grad
19
Fehler plotten
Fehler logarith...
Funktion plotten
Polynom Interpolation
Interpolation beibehalten
Eigenschaft Achsen
Automatisch


Stuetzstellen
+0.0000 -> +0.0000
+0.3307 -> +0.0106
+0.6614 -> +0.0208
+0.9921 -> -0.0724
+1.3228 -> -0.1465
+1.6535 -> +0.0888
+1.9842 -> +0.3923
+2.3149 -> +0.0882
+2.6456 -> -0.6409
+2.9762 -> -0.5441
+3.3069 -> +0.6717
+3.6376 -> +1.2118
+3.9683 -> -0.2592
+4.2990 -> -1.8418
+4.6297 -> -0.6960
+4.9604 -> +2.0599
+5.2911 -> +2.0597
+5.6218 -> -1.5042
+5.9525 -> -3.4348
+6.2832 -> -0.0000
t - Wert
y - Wert
Hinzufue...
Loesche Stuetzstelle
Loesche Liste
Lade Liste
Speichere Liste
Eingabetyp:
Funkti...
Manue
t^2*sin(4*t)/10
linkes Intervallende
0
rechtes Intervallende
2*pi
Anzahl Stuetzstellen
(aequidistant)
20
Grad
19
Fehler plotten
Fehler logarith...
Funktion plotten
Polynom Interpolation
Interpolation beibehalten
Eigenschaft Achsen
Automatisch

Aufgabe 37:

Gegeben:
- $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertierbar
- $A = Q_1R_1$ und $A = Q_2R_2$
- R_1, R_2 obere Δ's-Matrizen
- Q_1, Q_2 orthogonale Matrizen (d.h. $Q_1^TQ_1 = Q_1Q_1^T = I$ und $Q_2^TQ_2 = Q_2Q_2^T = I$ bzw. $Q_1^T = Q_1^{-1}$ und $Q_2^T = Q_2^{-1}$)

Zeige:

$$\exists \underset{\text{Diagonalmatrix}}{D \in \mathbb{R}^{m\times m}} \text{ mit } |d_{ii}| = 1 \ \forall i = 1,\dots,m : \begin{cases} ① : Q_1 = Q_2 D \\ \text{und} \\ ② : R_2 = DR_1 \end{cases}$$

Beweis: Zunächst gilt nach Voraussetzung

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 \text{ orthogonal} \Rightarrow Q_1 \text{ invertierbar} \\ \qquad\qquad\qquad\quad A \text{ invertierbar} \end{array}\right\} \Rightarrow R_1 \text{ invertierbar}$$

Es folgt die Darstellung (beachte: $Q_1^{-1} = (R_1^{-1}A)^{-1}$, $R_2 = Q_2^{-1}A$, $R_1^{-1} = (Q_1^{-1}A)^{-1} = A^{-1}Q_1$):

$$Q_2^TQ_1 \underset{\substack{\uparrow \\ Q_2 \text{ orth.}}}{=} Q_2^{-1}Q_1 = \underbrace{Q_2^{-1}A}_{=R_2}\underbrace{A^{-1}Q_1}_{\substack{=(Q_1^{-1}A)^{-1} \\ = R_1^{-1}}} = R_2R_1^{-1} =: D \qquad (37.1)$$

Dabei gilt

$$Ⓐ: \left.\begin{array}{l} R_2 \text{ obere } \Delta\text{'s-Matrix} \\ R_1^{-1} \text{ obere } \Delta\text{'s-Matrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D := R_2R_1^{-1} \text{ obere } \Delta\text{'s-Matrix} \\ (\text{d.h. } |d_{ij}| = 0 \ \forall\, m \geq i > j \geq 1) \end{array}$$

$$Ⓑ: \left.\begin{array}{l} Q_2^T \text{ orthogonal} \\ Q_1 \text{ orthogonal} \end{array}\right\} \Rightarrow D := Q_2^TQ_1 \text{ orthogonal}$$

(Beweis:

$$D^TD = (Q_2^TQ_1)^TQ_2^TQ_1 = Q_1^T\underbrace{Q_2Q_2^T}_{\substack{= I \\ \uparrow \\ Q_2 \text{ ortho.}}}Q_1 = Q_1^TQ_1 \underset{\substack{\uparrow \\ Q_1 \text{ ortho.}}}{=} I \quad)$$

Induktiv erhalten wir:

- wegen Ⓑ ist die 1. Spalte auf 1 normiert, d.h.

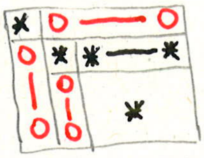
$$1 \underset{Ⓑ}{=} \sum_{i=1}^{m} |d_{i1}| \underset{\substack{\uparrow \\ |d_{i1}| = 0 \ \forall 1 < i \leq m \\ (\text{wegen } Ⓐ)}}{=} |d_{11}| \qquad \begin{pmatrix} * & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Weiter ist wegen Ⓑ die 1. Zeile auf 1 normiert, d.h.

$$1 \underset{Ⓑ}{=} \sum_{i=1}^{m} |d_{1i}| = \underbrace{|d_{11}|}_{\substack{=1 \\ \text{Zeile zuvor}}} + \sum_{i=2}^{m} |d_{1i}| = 1 + \sum_{i=2}^{m} |d_{1i}|$$

$$(37.2) \qquad \Rightarrow \sum_{i=2}^{m} |d_{1i}| = 0 \underset{\substack{\text{Summanden} \\ \text{positiv}}}{\Rightarrow} |d_{1i}| = 0 \ \forall i = 2,\dots,m \qquad \begin{pmatrix} * & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

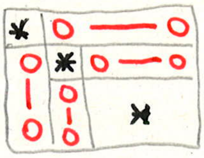
- Wegen Ⓑ ist die 2. Spalte auf 1 normiert, d.h.



$$1 \underset{Ⓑ}{=} \sum_{i=1}^{m} |d_{i2}| = \underbrace{|d_{12}|}_{\substack{=0 \\ \uparrow \\ (37.2)}} + |d_{22}| + \underbrace{\sum_{i=3}^{m} |d_{i2}|}_{=0 \text{ (wegen Ⓐ)}} = |d_{22}| \quad (37.3)$$

Weiter ist wegen Ⓑ die ~~Spalte~~ 2. Zeile auf 1 normiert, d.h.

$$1 \underset{Ⓑ}{=} \sum_{i=1}^{m} |d_{2i}| = \underbrace{|d_{21}|}_{\substack{=0 \\ Ⓐ}} + \underbrace{|d_{22}|}_{\substack{=1 \\ (37.3)}} + \sum_{i=3}^{m} |d_{2i}| = 1 + \sum_{i=3}^{m} |d_{2i}|$$



$$\Rightarrow \sum_{i=3}^{m} |d_{2i}| = 0 \underset{\substack{\text{Summ.} \\ \text{pos.}}}{\Rightarrow} |d_{2i}| = 0 \ \forall i = 3, \dots, m$$

- u.s.w.

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{mm} \end{pmatrix} \text{ mit } |d_{ii}| = 1 \ \forall i = 1, \dots, m$$

Weiter gelten wegen (37.1) die folgenden Darstellungen:

- $Q_2^T Q_1 = D \underset{\substack{\cdot Q_2 \\ \text{von links}}}{\Rightarrow} Q_1 = \underbrace{Q_2 \overbrace{Q_2^T Q_1}^{=D}}_{=I \quad =I} = Q_2 D$
- $R_2 R_1^{-1} = D \underset{\substack{\cdot R_1 \\ \text{von rechts}}}{\Rightarrow} R_2 = \underbrace{R_2 R_1^{-1}}_{=D} R_1 = D R_1$

Ⓧ: Dieser Teil lässt sich auch kürzer zeigen:

$$\left.\begin{array}{l} D \text{ obere } \Delta\text{'s-Matrix} \Rightarrow D^{-1} \text{ obere } \Delta\text{'s-Matrix} \\ \left.\begin{array}{l} D \text{ Orthogonalmatrix} \\ D \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{array}\right\} \Rightarrow D^T = D^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow D \text{ Diagonalmatrix}$$

Weiter gilt

$$D D^T = I \underset{D \text{ Diag.}}{\Rightarrow} d_{ii} \cdot d_{ii} = 1 \Leftrightarrow d_{ii}^2 = 1 \Leftrightarrow |d_{ii}| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Aufgabe 38:

zu (a): z.z.: $(\mathbb{R}^m, \|.\|_w)$ ist ein normierter Raum, d.h. (sei $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $w_i > 0$)

① : $\|.\|_w : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (Positivität von $\|.\|_w$)

② : $\|x\|_w = 0 \Rightarrow x = 0 \ (\in \mathbb{R}^m)$ (Definitheit)

③ : $\|\alpha \cdot x\|_w = |\alpha| \cdot \|x\|_w \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^m$ (absolute Homogenität)

④ : $\|x+y\|_w \leq \|x\|_w + \|y\|_w \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^m$ (Δ's-Ungleichung)

1. Möglichkeit: Definiere (da $w_i > 0$) $D := \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{w_m} \end{pmatrix}$, dann gilt $\|x\|_w = \|Dx\|_2$

[redacted] denn:

$$\|x\|_w = \left(\sum_{i=1}^m w_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m (\sqrt{w_i}\, x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{w_1}\, x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{w_m}\, x_m \end{pmatrix} \right\|_2 = \|Dx\|_2 \qquad (38.1)$$

zu ①:

$$\|x\|_w \underset{(38.1)}{=} \|Dx\|_2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$\|.\|_2$ Norm auf $\mathbb{R}^m$, $y := Dx \in \mathbb{R}^m$

zu ②:

$$\|x\|_w \underset{(38.1)}{=} \|Dx\|_2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow Dx = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\|.\|_2$ Norm auf $\mathbb{R}^m$; D invertierbar (da $w_i > 0 \ \forall i$)

zu ③:

$$\|\alpha \cdot x\|_w \underset{(38.1)}{=} \|D(\alpha \cdot x)\|_2 = \|\alpha \cdot Dx\|_2 = |\alpha| \cdot \|Dx\|_2 \underset{(38.1)}{=} |\alpha| \cdot \|x\|_w$$

$\|.\|_2$ Norm auf $\mathbb{R}^m$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^m$

zu ④:

$$\|x+y\|_w \underset{(38.1)}{=} \|D(x+y)\|_2 = \|Dx + Dy\|_2 \leq \|Dx\|_2 + \|Dy\|_2$$

$\|.\|_2$ Norm auf $\mathbb{R}^m$

$$\underset{(38.1)}{=} \|x\|_w + \|y\|_w \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^m$$

2. Möglichkeit: (Direkter Nachweis)

zu ②:

$$\|x\|_w = \left(\sum_{i=1}^m w_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m w_i x_i^2 = 0 \underset{\substack{x_i^2 \geq 0 \\ w_i > 0}}{\Rightarrow} w_i x_i^2 = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\underset{w_i > 0}{\Rightarrow} x_i^2 = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m \Rightarrow x = 0 \ (\in \mathbb{R}^m)$$

zu ①:

$$\|x\|_w = \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^m \underbrace{w_i}_{>0} \cdot \underbrace{x_i^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

zu ③:

$$\|\alpha \cdot x\|_w = \left(\sum_{i=1}^m w_i (\alpha x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \left(\sum_{i=1}^m w_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\|_w$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^m$

zu (4):

zu (b): Erinnerung:

Satz 9.1: $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m,p}$ mit $\operatorname{rang}(A) = p$. Dann gelten für das Ausgleichsproblem

$$\|Ay - b\|_2^2 \overset{!}{=} \min$$

die folgenden Aussagen:

① : $\exists_1 \bar{y} \in \mathbb{R}^p : \|A\bar{y} - b\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|_2$

② : $A^T A \in \mathbb{R}^{p,p}$ ist invertierbar.

③ : $\bar{y}$ ist eindeutige Lösung der Normalgleichung, d.h.

$$A^T A \bar{y} = A^T b$$

Betrachte das lineare Ausgleichsproblem ($b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m,p}$, $m \geq p$, $\operatorname{rang}(A) = p$)

$$\|Ay - b\|_W \underset{(38.1)}{=} \|D(Ay - b)\|_2 = \|\underbrace{DA}_{=:\tilde{A}}y - \underbrace{Db}_{=:\tilde{b}}\|_2 \overset{!}{=} \min \qquad (38.2)$$

Wir überpüfen die Voraussetzungen von Satz 9.1:

- $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Db \in \mathbb{R}^m$
- $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times p} \Rightarrow DA \in \mathbb{R}^{m \times p}$
- $\left.\begin{array}{l} D \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ Diagonalmatrix mit } \operatorname{rang}(D) \overset{\text{da } w_i > 0\ \forall i = 1,\dots,m}{=} m \\ A \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad \text{mit } \operatorname{rang}(A) = p \end{array}\right\} \Rightarrow DA \text{ mit } \operatorname{rang}(DA) = p$

$$\overset{\text{Satz 9.1 ①}}{\Longrightarrow} \exists_1 \bar{y} \in \mathbb{R}^p : \underbrace{\|\tilde{A}\bar{y} - \tilde{b}\|_2}_{\underset{(38.2)}{=} \|A\bar{y} - b\|_W} = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \underbrace{\|\tilde{A}y - \tilde{b}\|_2}_{\underset{(38.2)}{=} \|Ay - b\|_W}$$

zu (c): Insbesondere gilt, nach Satz 9.1 ②, dass die Matrix

$$\tilde{A}^T \tilde{A} = (DA)^T DA = A^T D^T D A = A^T D D A = A^T \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_m \end{pmatrix} A$$

invertierbar ist und $\bar{y}$ (nach ③) die eindeutige Lösung der Normalgleichung ist:

$$\tilde{A}^T \tilde{A} \bar{y} = \tilde{A}^T \tilde{b} \iff A^T \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_m \end{pmatrix} A \bar{y} = (DA)^T \cdot Db$$
$$= A^T D^T D b$$
$$= A^T D D b$$
$$= A^T \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_m \end{pmatrix} b$$

$\Rightarrow$ Normalgleichung: $A^T \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_m \end{pmatrix} A \bar{y} = A^T \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_m \end{pmatrix} b$