# Übungen zur Vorlesung
# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
## Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas — Übungsblatt 1
Dipl.-Math. Denny Otten — 16.10.2013

**Abgabe: Mittwoch, 23.10.2013, 12:00 Uhr** in das Postfach des Tutors.
Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

**Aufgabe 1:** [Lineare Differentialgleichungen]

Benutzen Sie die Theorie der linearen Anfangswertaufgaben, um die Lösungen der folgenden Aufgaben zu berechnen:

a) $u'(t) = -\alpha u(t) + t^2,\ u(0) = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$,

b) $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$,

c) $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:** [Existenz und Eindeutigkeit]

Betrachten Sie die Anfangswertaufgaben

a) $u'(t) = \sqrt{|t|}\cos^2(u(t))$, $u(0) = u^0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

b) $u'(t) = \sqrt{|u(t)|}\sin^2(t)$, $u(0) = u^0 > 0$.

Zeigen Sie, dass die Nichtlinearität $f$ in $C^{0,1}(I \times \Omega, \mathbb{R})$ liegt, wenn man die offenen Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ geeignet wählt (wie?). Somit ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar. Berechnen Sie die Lösungen auf möglichst großen Existenzintervallen (Hinweis: Trennung der Veränderlichen).

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:** [Richtungsfeld]

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld (mindestens 15 Pfeile) der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Lösungskurve, die durch den Punkt $t = 1$, $u = 3$ verläuft!
$u' = (1 - t^2)u, \quad t \in [0, 3], u \in [-1, 4]$.

b) Skizzieren Sie das projizierte Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Bereiche, in denen waagerechte bzw. senkrechte Pfeile vorkommen.
$u_1' = u_1 u_2$,
$u_2' = u_2 - u_1, \quad u_1, u_2 \in [-1, 1]$.

Für beide Aufgaben können Sie in MATLAB eine geeignete NUMLAB-GUI verwenden.

(6 Punkte)

**Definition:** Das **Richtungsfeld** (oder **Vektorfeld**, engl.: **slope field**) einer Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

zu gegebener rechter Seite $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq I \times \Omega =: D \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Abbildung

$$R : D \supseteq \Lambda \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t, v) \mapsto R(t, v) := (1, f(t, v)).$$