Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 3
30.10.2013

Abgabe: Mittwoch, 06.11.2013, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 7: [Konsistenz der Taylormethode]

Sei $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^d)$ und $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

für $t \in [t_0, t_1]$. Bestimmen Sie die Verfahrensfunktion $\varphi : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ für die aus Aufgabe 6 bekannte (R-stufige) Taylormethode

$$u_h^n = u_h^{n-1} + h \sum_{r=1}^{R} \frac{h^{r-1}}{r!} f_r\left(t_{n-1}, u_h^{n-1}\right), \quad h > 0 \text{ Schrittweite}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$f_r(t, v) := \begin{cases} v & , r = 0, \\ \left[\partial_t f_{r-1}\right](t, v) + \left[\partial_v f_{r-1}\right](t, v) \cdot f(t, v) & , r \geqslant 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie weiter, dass die Taylormethode konsistent der Ordnung $p = R$ ist. (Hinweis: Verwenden Sie den Konsistenzsatz 2.1 aus der Vorlesung).

(6 Punkte)

Aufgabe 8: [Euler-Verfahren und komplexe, lineare AWA]

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\bar{u}(t),\ t \geq 0$ die **komplexwertige** Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u' = \lambda u,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite h für diese Aufgabe auf jedem endlichen Intervall $[0, T]$ konsistent und konvergent von 1. Ordnung ist, d.h.

$$\sup \{|\tau_h(t_j)| : j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq t_j = jh \leq T\} = \mathcal{O}(h)$$
$$\sup \{|\eta_h(t_j)| : j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq t_j = jh \leq T\} = \mathcal{O}(h).$$

(6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass dies auch auf dem unendlichen Intervall (d.h. Supremum über alle $j \in \mathbb{N}$) richtig ist, sofern Re $\lambda < 0$. Im Fall Re $\lambda > 0$ ist es im allgemeinen falsch (Gegenbeispiel!).

(2 Zusatzpunkte)

Hinweis: Nützliche Restgliedabschätzungen für die komplexe Exponentialreihe findet man in Forster, Analysis 1, § 13. Auch zeige man:

$$|z^j - w^j| \leq j \left[\text{Max}\,(|z|, |w|)\right]^{j-1} |z - w| \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 9: [Euler-Verfahren]

Lösen Sie die Verhulst–Gleichung

$$u' = u(1-u),\ t \in [0,10],\ u(0) = u^0$$

numerisch mit dem Euler–Verfahren.
Zu jeweiliger Schrittweite h bezeichne dabei $u_h : \Omega_h \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Omega_h := \{t_j = jh : j = 0, \dots, 10/h\}$$

die Euler-Näherung sowie $\bar{u} : [0,10] \to \mathbb{R}$ die explizit bekannte Lösung der Verhulst–Gleichung.
Legen Sie für den maximalen Konvergenzfehler

$$\eta_{\max}(h, u^0) = \max\left\{|\bar{u}(t_j) - u_h(t_j)| : t_j \in [0,10]\right\}$$

eine Tabelle an, die sich durch Kombination der Werte $h = 2^{-i}$, $i = 1, \dots, 6$, und $u^0 = 0.001, 0.1, 0.5, 10$ ergibt. Geben Sie auch die Stelle t_j an, bei der das Maximum angenommen wird, und treffen Sie Vorkehrungen für einen Overflow der Euler–Werte. Interpretieren Sie die Tabelle.

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de. (6 Punkte)