Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 6
20.11.2013

Abgabe: Mittwoch, 27.11.2013, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.

Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 16 [implizite Runge-Kutta-Verfahren und lineare AWA]

Wenden Sie die beiden Gauß–artigen impliziten Runge–Kutta Verfahren $(m = 1, p = 2,$ bzw. $m = 2, p = 4)$ auf das System mit konstanten Koeffizienten an

$$u' = Au,\ t \geq 0,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass die Verfahren die Form

$$u^{j+1} = A_h u^j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

mit einer Matrix $A_h = r(hA)$ haben. Dabei ist $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion und man definiert $r(C) = p(C)(q(C))^{-1}$ für $C \in \mathbb{R}^{n,n}$. Bis zu welcher Ordnung stimmen die Taylorentwicklungen von $r(z)$ und e^z bei $z = 0$ überein?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 17: [Lipschitz–Stetigkeit expliziter Runge–Kutta–Verfahren]

Sei $\varphi = \varphi(t, v, h)$ die Verfahrensfunktion eines konsistenten expliziten Runge–Kutta–Verfahrens zur Bestimmung der numerischen Lösung der Differentialgleichung

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0,$$

wobei $f : [t_0, t_E] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz beschränkt mit der Konstanten L sei, d. h.

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leqslant L \|v - w\| \quad \forall\, t \in [t_0, t_E]\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass φ einer Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument genügt, dass also ein L_h existiert mit

$$\|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)\| \leqslant L_h \|v - w\| \quad \forall\, t \in [t_0, t_E]\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Wie verhält sich L_h für $h \to 0$?

(6 Punkte)

Aufgabe 18: [Implementierung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens]

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe zum (modifizierten) Lotka-Volterra-Modell

$$x' = \alpha(1-y)x - \lambda x^2,\ x(0) = x_0,$$
$$y' = (x-1)y - \mu y^2,\ y(0) = y_0,$$

mit konstanter Schrittweite und dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren für $t \in [0, 5]$ und $\alpha = 10$.

a) Führen Sie jeweils eine Rechnung mit $h = \frac{1}{40}$, $(x_0, y_0) = (3, 1)$ für die Parameterwerte $\lambda = \mu = 0$ und $\lambda = \mu = 1$ durch. Berechnen Sie auch den Wert der Erhaltungsgröße $E(x, y)$ des Lotka-Volterra-Modells an den numerischen Näherungsvektoren. Zeichnen Sie jeweils (t, x), (t, y) und $(t, E(x, y))$.

b) Berechnen Sie die experimentelle Konvergenzordnung

$$\mathrm{EOC}(h, qh, q^2h) := \frac{1}{\ln q} \ln \left(\frac{\|u_{qh}(2) - u_{q^2h}(2)\|_2}{\|u_h(2) - u_{qh}(2)\|_2} \right)$$

zur Zeit $t = 2$ für den Anfangswert $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$, die Parameterwerte $\lambda = \mu = 1$ und Schrittweiten $h = q^i h_0$, $i = 0, \dots, 6$, $q = \frac{1}{2}$, $h_0 = \frac{1}{2}$, wobei u_h die numerische Näherungslösung zur Schrittweite h bezeichne. Welche Beobachtungen machen Sie?

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)