Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 7
27.11.2013

Abgabe: Mittwoch, 04.12.2013, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.

Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 19 [Autonomisierung]

Wir betrachten die nicht-autonome Differentialgleichung

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = u^0 \tag{1}$$

mit $f \in C(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Indem man die Zeit als künstliche Zustandsvariable auffasst, kann das Anfangswertproblem (1) autonomisiert werden, d.h. äquivalent umgeschrieben werden in

$$\begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(t,u) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ t_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta-Verfahren genau dann invariant unter Autonomisierung ist, wenn für die Koeffizienten gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} = \alpha_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Hinweis: Invariant unter Autonomisierung bedeutet, dass die numerische Lösung für u von (2) mit der von (1) übereinstimmt. Verwenden Sie $s \geqslant 0$ als unabhängige Variable in (2).

(6 Punkte)

Aufgabe 20: [Stabilität des impliziten Euler-Verfahrens]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t,u),\, t \in I = [t_0, t_E], \quad u(t_0) = u^0 \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $f \in C(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ einer einseitigen Lipschitzbedingung genüge, vergleiche Aufgabe 5, d.h. es gebe ein $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\langle f(t,v) - f(t,w), v - w \rangle \leqslant \alpha \left\| v - w \right\|_2^2 \quad \forall\, t \in I\; \forall\, v, w \in \mathbb{R}^d.$$

Man zeige, dass das implizite Euler-Verfahren

$$\frac{1}{h_j}\left(u^{j+1} - u^j\right) = f(t_{j+1}, u^{j+1}), \quad j = 0, \ldots, M-1, \quad h_{\max} = \max_{j=0,\ldots,M-1} h_j$$

unter der Voraussetzung $\alpha h_{\max} \leqslant q < 1$ mit $q \in]0,1[$ stabil ist bezüglich der Norm

$$\left\| u \right\|_{2,\infty} = \max_{j=0,\ldots,M} \left\| u(t_j) \right\|_2,\, u \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\Omega_h}.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass das Gleichungssystem

$$v - u = hf(t, v)$$

für alle $u \in \mathbb{R}^d$, $t \in I$ und $h \geqslant 0$ mit $\alpha h < 1$ genau eine Lösung $v = v(t, u, h)$ besitzt. Weiter orientiere man sich eng am Stabilitätsbeweis der Vorlesung, Satz 2.7, und verwende die einseitige Lipschitzbedingung anstelle der beidseitigen.

(6 Punkte)

Aufgabe 21: [Implizite Runge-Kutta-Verfahren]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0.$$

Schreiben Sie ein Programm, das folgendes leistet:
Nach Eingabe der Anfangsdaten u^0, der rechten Seite f sowie deren Ableitung Df, des Start- und Endzeitpunktes t_0 und t_E, der Schrittweite h und eines m-stufigen Runge-Kutta-Tableaus

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{m,m} \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \end{array}$$

soll das Programm das zugehörige (implizite) Runge-Kutta-Verfahren durchführen. Lösen Sie die impliziten Gleichungen im j-ten Schritt mit dem (mehrdimensionalen) Newton-Verfahren. Starten Sie dabei mit $k_i^0 = f(t_j, u^j)$ für $i = 1, \ldots, m$ und beenden Sie die Iteration, sobald

$$\max_{i=1,\ldots,m} \left\| k_i^{\nu+1} - k_i^{\nu} \right\|_\infty \leqslant 10^{-7}$$

erfüllt ist. Brechen Sie die Rechnung ab, falls das Newton-Verfahren nicht konvergiert (zu viele Iterationsschritte oder Overflow).
Verwenden Sie Ihr Programm zur numerischen Lösung der aus Aufgabe 14 bekannten Beispiele a) und b) auf dem Intervall $[0, 7]$ mit den angegebenen impliziten Runge-Kutta-Verfahren und der Schrittweite $h = 0.1$. Zeichnen Sie für a) und b) jeweils ein aussagekräftiges Diagramm, das die exakte Lösung und alle numerischen Lösungen enthält!
Runge-Kutta-Tableaus:

- $m = 1$ (mit Konsistenzordnung 2)

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

- $m = 2$ (mit Konsistenzordnung 4)

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right) & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(6 Punkte)