Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 8
04.12.2013

Abgabe: Mittwoch, 11.12.2013, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.

Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 22: [Probleme auf unbeschränkten Intervallen]

Man betrachte für $a \in \mathbb{R}$ das explizite und implizite Eulerverfahren für das 2-dimensionale AWP

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}, \, t > 0, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Das Gitter I_h sei in beiden Fällen für $h > 0$ durch

$$I_h = \{t_j = jh | j \in \mathbb{N}_0\}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1) und ihr Verhalten für $t \to \infty$.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung u_h des expliziten Eulerverfahrens $\lim_{j\to\infty} \|u_h(t_j)\|_2 = \infty$ erfüllt, die des impliziten aber $\lim_{j\to\infty} \|u_h(t_j)\|_2 = 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 23: [Asymptotische Entwicklung des Konvergenzfehlers]

Beweisen Sie den Satz über die Entwicklung des Konvergenzfehlers (Satz 2.10) für den Spezialfall $q = p + 1$ und $n = 1$. Leiten Sie dazu zuerst eine explizite Darstellung der Anfangswertaufgabe für die Koeffizientenfunktion $e_1(t)$ her und gehen Sie dann wie im Fall $q = p$ vor.

(6 Punkte)

Aufgabe 24: [Implementation der adaptiven Schrittweitensteuerung]

a) Lösen Sie mit dem (expliziten) klassischen Runge–Kutta–Verfahren und den Schrittweiten $h = 10^{-i}$, $i = 1, 2, 3$ die Anfangswertaufgabe (das sogenannte Lorenz-System)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \lambda x - y - xz \\ -\mu z + xy \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $\lambda = 28$, $\mu = \frac{8}{3}$ und $0 \leqslant t \leqslant 50$.
Geben Sie die numerischen Näherungen nur zu den Zeiten $t_k = 5k$, $k = 0, \ldots, 10$ in einer Tabelle aus und vergleichen Sie die Ergebnisse für die verschiedenen Schrittweiten.

b) Steuern Sie in einer zweiten Rechnung das klassische Runge–Kutta–Verfahren mit den Daten

$$\kappa = 10,\ h_0 = 0.2,\ h_{\max} = 0.5,\ \mathrm{tol} = 10^{-4},\ 10^{-6},\ 10^{-8}$$

und geben Sie ebenfalls die Näherungswerte für die Zeitpunkte $t_k = 5k$ aus. Man verwende dazu jeweils beim Überschreiten eines solchen Zeitpunktes einen gesonderten Runge–Kutta–Schritt mit geeigneter Schrittweite. Dieser Zwischenschritt dient nur der Berechnung eines Näherungswertes und soll die Steuerung ansonsten unbeeinflusst lassen.
Zeichnen Sie die gesteuerte Lösung zu $\mathrm{tol} = 10^{-6}$ und die beste äquidistante Lösung zu $h = 10^{-3}$ in ein (t, x) bzw. ein (t, z) Diagramm.

(6 Punkte)