Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 10
18.12.2013

Abgabe: Mittwoch, 08.01.2014, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 28: [Symmetrische Koeffizienten von Mehrschrittverfahren]

Gegeben sei eine Mehrstellenformel

$$\ell(f) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu f(\nu) - \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu f'(\nu), \quad f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

mit

$$\ell(f) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{P}_p, \quad \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu = 1. \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_ν, b_ν seien durch (1) eindeutig bestimmt.
Man zeige:

$$a_{m-\nu} = -a_\nu \quad \text{und} \quad b_{m-\nu} = b_\nu \quad \text{für alle} \quad \nu = 0, \ldots, m.$$

Hinweis: Man beachte, dass $p = 2m$ aus der eindeutigen Lösbarkeit von (1) folgt, und man wähle eine geeignete Basis von $\mathcal{P}_p$.

(6 Punkte)

Aufgabe 29: [BDF-Verfahren mit variabler Schrittweite]

Man bestimme die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ eines Zweischritt-Verfahrens mit nichtäquidistanten Knoten $t_j < t_{j+1} < t_{j+2}$,

$$\alpha_0 u^j + \alpha_1 u^{j+1} + \alpha_2 u^{j+2} = f(t_{j+2}, u^{j+2}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

so dass die Konsistenzordnung $\mathcal{O}(h_{\max}^2)$ vorliegt, wobei $h_{\max} = \max_{j=0,\ldots,M-1} h_j$ und $h_j = t_{j+1} - t_j$.
Unter welcher Bedingung an h_j, h_{j+1} erfüllt das charakteristische Polynom $q(z) = \sum_{\nu=0}^{2} \alpha_\nu z^\nu$ die Wurzelbedingung?
Hinweis: Zur Konstruktion der Formel und zum Nachweis der Konsistenzordnung kann Numerik I, §5.4 verwendet werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 30: [Adams–Bashforth–Programmierung]

Das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll numerisch mit dem m–Schritt–Adams–Bashforth–Verfahren für $m \in \{1, \dots, 12\}$ auf $[0, 1]$ realisiert werden.
Berechnen Sie dafür zunächst für jedes m die Koeffizienten $a_{m-1}, a_m, b_0, \dots, b_{m-1}$, indem Sie das entsprechende lineare Gleichungssystem (vgl. Vorlesung Satz 3.1) aufstellen und numerisch lösen.
Verwenden Sie für alle Verfahren die Schrittweiten $h_i = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}$, $i = 0, \dots, 5$. Als Startwerte nehmen Sie die Werte der aus Aufgabe 12 b) bekannten exakten Lösung $\bar{u}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+2t \\ 5+t \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$ an den Stellen $t_j = h_i j$, $j = 0, \dots, m-1$.
Zeichnen Sie den Fehler der numerischen Lösung u_h zur exakten Lösung $\bar{u}$ an den Stellen t_j in ein aussagekräftiges logarithmisches Diagramm ein und bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung zur Zeit $t = 1$ (vgl. Aufgabe 10)

$$EOC(h_i, h_{i+1}) := \frac{\ln\left(\frac{\varphi(h_i)}{\varphi(h_{i+1})}\right)}{\ln\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)}, \quad i = 0, \dots, 4, \quad \varphi(h) = \|u_h(1) - \bar{u}(1)\|_2 .$$

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)