Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 11
08.01.2014

Abgabe: Mittwoch, 15.01.2014, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 31: [Lineare Differenzengleichungen]

Geben Sie für die folgenden Differenzengleichungen jeweils die allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe und die spezielle Lösung zu den vorgegebenen Anfangswerten an.

(a) $v_{j+2} = v_{j+1} + v_j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$

Anfangswerte: $v_0 = 0,\ v_1 = 1$ (Fibonacci–Folge)

(b) Verfahren der rückwärtigen Differenzen (BDF) der Ordnung 2 bzw. 3 für die Aufgabe $u' = 0,\ u(0) = 1$

Anfangswerte: $v_0 = 1,\ v_1 = 1 + h^2$ bzw. $v_0 = 1,\ v_1 = 1,\ v_2 = 1 + h^3$

(6 Punkte)

Aufgabe 32: [Schießmethode]

Überlegen Sie sich eine Schießmethode für die allgemeine skalare Sturmsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x, u(x)), \quad a \leq x \leq b, \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0$ und $\alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$ vorausgesetzt ist. Führen Sie nur einen reellen Parameter s ein und stellen Sie eine nichtlineare Gleichung $g(s) = 0$ auf, deren Lösung äquivalent zur Lösung der Randwertaufgabe ist. Geben Sie an, welche Anfangswertaufgabe man lösen muss, um die Ableitung $g'(s)$ zu erhalten.

(6 Punkte)

Aufgabe 33: [Implementierung eines Schießverfahrens]

Lösen Sie die skalare Randwertaufgabe

$$u'' = \frac{3}{2}u^2, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = 4,\ u(1) = 1$$

numerisch mit dem einfachen Schießverfahren:

Bezeichnet $u(x, s)$ die Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten

$$u(0) = 4,\ u'(0) = s,$$

so löse man die Gleichung

$$g(s) = u(1, s) - 1 = 0$$

mit Hilfe der Regula falsi (Skript Kapitel 4, §1.1) zu geeigneten Startwerten. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $|g(s)| \leqslant tol$ erfüllt ist und berechnen Sie $u(1, s)$ mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite h für das entsprechende System 1. Ordnung ($h = \frac{1}{400}$, $tol = 10^{-12}$).
Plotten Sie beide Lösungskurven in dasselbe Diagramm!

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)