Übungen zur Vorlesung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 12
15.01.2014

Abgabe: Mittwoch, 22.01.2014, 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

Aufgabe 34: [Fredholmsche Alternative]

Man beweise für die lineare Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$\begin{aligned} Lu &:= u'' + pu' + qu = r, \text{ in } [a,b] \text{ mit } p,q,r \in C([a,b],\mathbb{R}) \\ Ru &:= \begin{pmatrix} \alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} = \gamma \end{aligned}$$

unter Verwendung der Fredholmschen Alternative für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (vgl. Skript, Satz 4.1), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die homogene Aufgabe $Lu = 0$, $Ru = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.

(ii) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ \alpha_b y_1(b) + \beta_b y_1'(b) & \alpha_b y_2(b) + \beta_b y_2'(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

ist invertierbar.
Dabei bezeichnen y_1, y_2 Lösungen des homogenen Gleichung $Ly = 0$ zu den Anfangswerten $y_1(a) = 1$, $y_1'(a) = 0$, bzw. $y_2(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$.

(iii) Für jedes $r \in C([a,b],\mathbb{R})$ und jedes $\gamma \in \mathbb{R}^2$ besitzt die inhomogene Randwertaufgabe $Lu = r$, $Ru = \gamma$ genau eine Lösung $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$. (6 Punkte)

Zusatz: Untersuchen Sie die Lösbarkeit der Randwertaufgaben

a) $u'' - u' - 2u = 0$, $u(0) + u'(0) = 1$, $u(1) = 0$,

b) $u'' + u = 0$, $u(0) = \gamma_a$, $u(\pi) = \gamma_b$. (4 Zusatzpunkte)

Aufgabe 35: [Transformation auf Systeme 1. Ordnung]

Transformieren Sie ein System von Randwertaufgaben 2. Ordnung

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)),\ x \in [a,b], \quad u(x) \in \mathbb{R}^n, \quad f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

mit

a) Dirichlet-Randbedingungen: $u(a) = \gamma_a$, $u(b) = \gamma_b$,

b) Neumann-Randbedingungen: $u'(a) = u'(b) = 0$,

c) periodischen Randbedingungen: $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$

in ein $2n$-dimensionales System 1. Ordnung der Gestalt

$$\begin{aligned} v'(x) &= g(x, v(x)),\ x \in [a,b], \\ R_a v(a) + R_b v(b) &= \Gamma. \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils g, R_a, R_b und Γ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 36: [Reguläre Lösung]

Die Lösung $\bar{u} \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ einer Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x, u(x)),\ x \in [a,b], \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b u(b) - \beta_b u'(b) &= \gamma_b \end{aligned}$$

heißt **regulär**, wenn $(\bar{u}, \bar{u}')$ eine reguläre Lösung des entsprechenden 2-dimensionalen Randwertproblems 1. Ordnung ist (vgl. Definition 4.4).
Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung der Randwertaufgabe

$$-u''(x) = \lambda \sin(u(x)),\ x \in [0,1], \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

regulär?

(6 Punkte)