Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 1
8.4.2011

Abgabe: Freitag, 15.4.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Berechnung einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

mit Startwerten im Intervall $I = [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Bestimmen Sie hierzu maximale Teilintervalle $I_n \subset I$, $n \in \mathbb{Z}$, so dass das Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 \in I_n$ gegen die Nullstelle $n\pi$ konvergiert. Geben Sie die Teilintervalle I_n für $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ explizit an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Skizzieren Sie für die folgenden linearen Differential- bzw. Differenzengleichungen charakteristische Phasenbilder und geben Sie die zugehörigen Evolutionsoperatoren an.

(a)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(b)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(c)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

(d)
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

(e)
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

(f)
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Gegeben sei ein nichtautonomes dynamisches System $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^{t,s}\})$, wobei

$$\varphi^{t,s} : X \to X$$

für $s,\ t - s \in \mathbb{T}$ definiert sind und die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\varphi^{t,t} = \mathrm{Id} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}, \tag{D1'}$$

$$\varphi^{t,s} \circ \varphi^{s,r} = \varphi^{t,r} \quad \forall\, t - s, s - r, r \in \mathbb{T}. \tag{D2'}$$

Zeigen Sie, dass durch

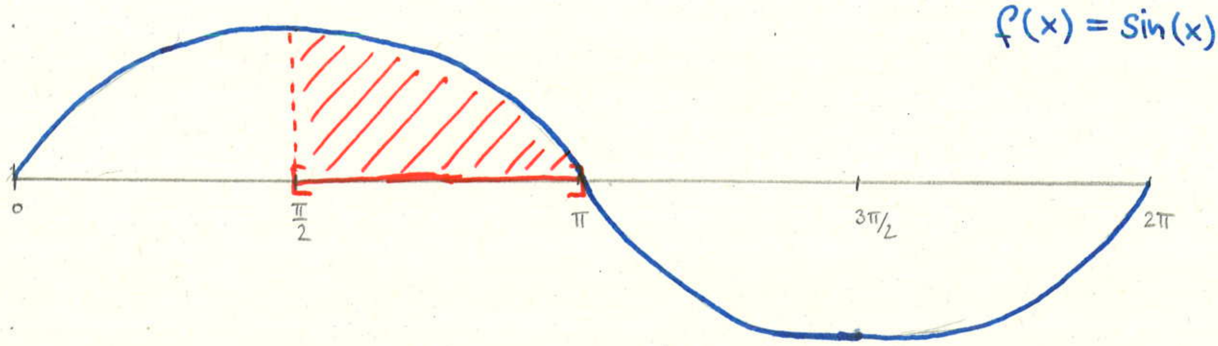
$$\Phi^t(\tau, u) = \big(t + \tau, \varphi^{t+\tau,\tau}(u)\big), \quad (\tau, u) \in \mathbb{T} \times X,\ t \in \mathbb{T},$$

ein dynamisches System auf $\mathbb{T} \times X$ erzeugt wird (Autonomisierung).
Wie hängen im kontinuierlichen, differenzierbaren Fall mit $X = \mathbb{R}^m$ die infinitesimalen Erzeuger von $\varphi^{t,s}$ und Φ^t zusammen?

(6 Punkte)

Aufgabe 1:

$f(x) = \sin(x)$



Motivation: $d \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig. Gesucht: $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ mit $f(\bar{x}) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Newton-Verfahren: $x_0 \in I \subset \mathbb{R}^d$ gegeben

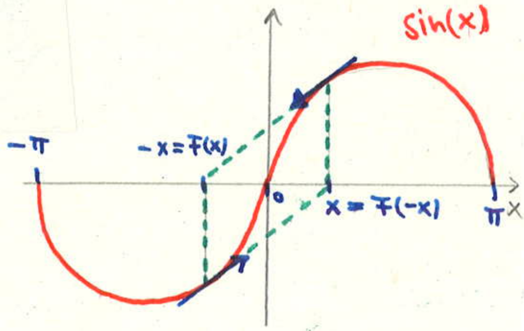
$$x_{n+1} := x_n - \left(J_f(x_n)\right)^{-1} \cdot f(x_n) \quad , \; n \in \mathbb{N}_0$$

1. Newton-Verfahren: ($f(x) = \sin(x)$, $d = 1$, $x_0 \in I := [\frac{\pi}{2}, \pi]$)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} \\ &= x_n - \tan(x_n) \quad =: F(x_n) \end{aligned}$$

2. Lokaler Einzugsbereich der Nullstelle $\bar{x}=0$: $F(x) := x - \tan(x)$

Bestimme x mit $F(x) = -x$



$$\begin{aligned} & F(x) = -x \\ \Leftrightarrow \;& x - \tan(x) = -x \\ \Leftrightarrow \;& \tan(x) = 2x \\ \Leftrightarrow \;& x \in \{0, \pm 1.165561185\} =: \{0, \pm a\} \\ \Rightarrow \;& F(]-a,a[) \subset]-a,a[\end{aligned}$$

(Insbesondere ist $\{-a,a\}$ ein 2-periodischer Orbit)

Daraus können wir folgen, dass der Einzugsbereich der Nullstelle $\bar{x}_n := n\pi$ durch

$$J_n :=]n\pi - a, n\pi + a[$$

gegeben ist.

3. Bestimmung des Intervalls I_n: Da $f(x)$ streng monoton fallend & stetig in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ist, ist auch $F(x)$ streng monoton fallend & stetig in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Daher erhalten wir $x_{n,min} \in I_n$ (bzw. $x_{n,max} \in I_n$) als Lösung der Gleichung

$$F(x) = n\pi + a \iff x - \tan(x) = n\pi + a$$

$$\left(\text{bzw. } F(x) = n\pi - a \iff x - \tan(x) = n\pi - a\right)$$

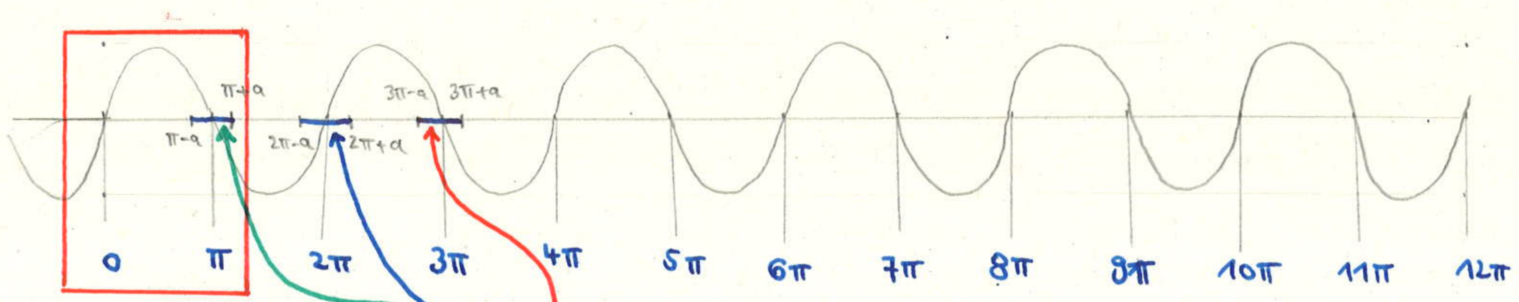
n	$x_{n,min}$	$x_{n,max}$
1	1.976031468	$\pi = 3.141592654$ (sogar: 4.307153839)
2	1.744335926	1.869453562
3	1.682590066	1.722603744
4	1.653399454	1.673237047
5	1.636331230	1.648195608
6	1.625120214	1.633017409
7	1.617189303	1.622825170
8	1.611281308	1.615505890
9	1.606709214	1.609993804
10	1.603065655	1.605692660

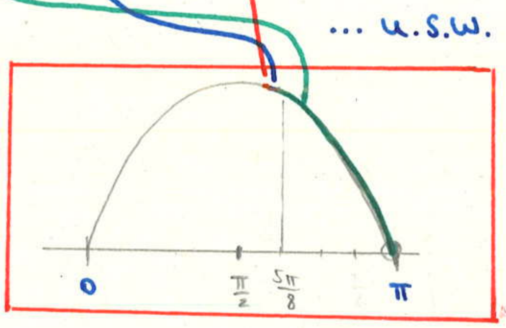
Intervalllängen nehmen mit wachsendem n ab.

$$I_n := \left] x_{n,min} , x_{n,max} \right[$$

Es gilt: $\forall x_0 \in I_n \; (n \in \mathbb{Z}) : \lim\limits_{k \to \infty} x_{k+1} = n\pi$

Graphische Veranschaulichung





$\frac{\pi}{2} = 1,5707963\ldots$

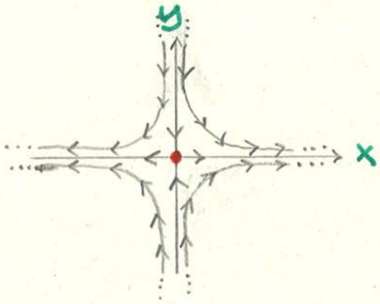
Beobachtung: Je weiter die Nullstelle $n\pi$ vom Intervall entfernt liegt, desto kleiner wird das Intervall in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, das auf sie abbildet

Aufgabe 2:

zu (a):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; u := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow u' = Au$$

- Phasenportrait:



• Fixpunkt

Phasenbild eines Sattels

- Evolutionsoperator:

$$\underbrace{u(t)}_{\text{Kurz für } u(t;u_0)} = e^{tA} u_0 =: \varphi^t(u_0)$$

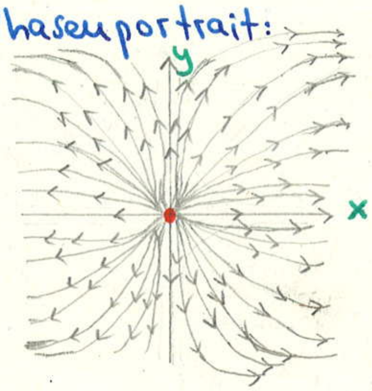
$$\Rightarrow \varphi^t(u_0) = e^{tA} u_0 = e^{\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}t \end{pmatrix}} u_0 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} u_0$$

$$\Rightarrow \varphi^t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} x_0 \\ e^{-\frac{1}{2}t} y_0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

zu (b):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; u := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow u' = Au$$

- Phasenportrait:



• Fixpunkt

- Evolutionsoperator

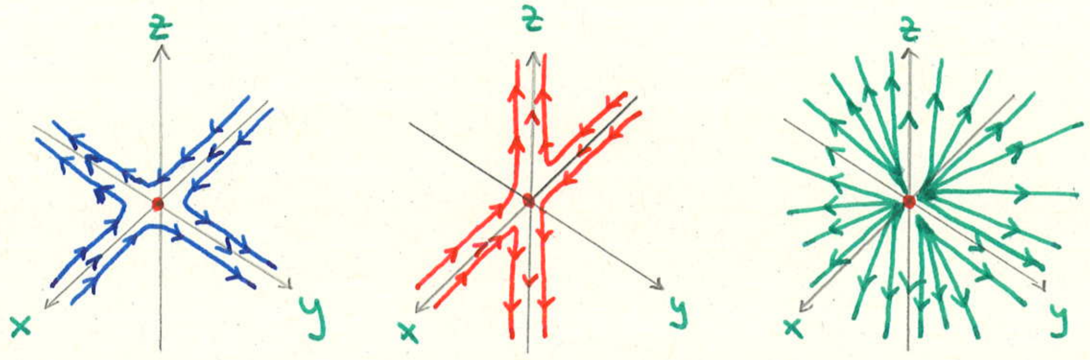
$$\underbrace{u(t)}_{\text{Kurz für } u(t;u_0)} = e^{tA} u_0 =: \varphi^t(u_0)$$

$$\Rightarrow \varphi^t(u_0) = e^{tA} u_0 = e^{\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t \end{pmatrix}} u_0 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} u_0$$

$$\Rightarrow \varphi^t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} x_0 \\ e^{\frac{1}{2}t} y_0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

zu (c): $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $u := \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\Rightarrow u' = Au$

- Phasenportrait: • Fixpunkt



x|y-Ansicht „Sattel"   x|z-Ansicht „Sattel"   y|z Ansicht

- Evolutionsoperator:

$$\underbrace{u(t)}_{\text{kurz für } u(t;u_0)} = e^{tA} u_0 =: \varphi^t(u_0)$$

$$\Rightarrow \varphi^t(u_0) = e^{tA} u_0 = \exp\begin{pmatrix}-2t&0&0\\0&\frac{1}{2}t&0\\0&0&\frac{1}{2}t\end{pmatrix}\cdot u_0 = \begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^{\frac{1}{2}t}&0\\0&0&e^{\frac{1}{2}t}\end{pmatrix}u_0$$

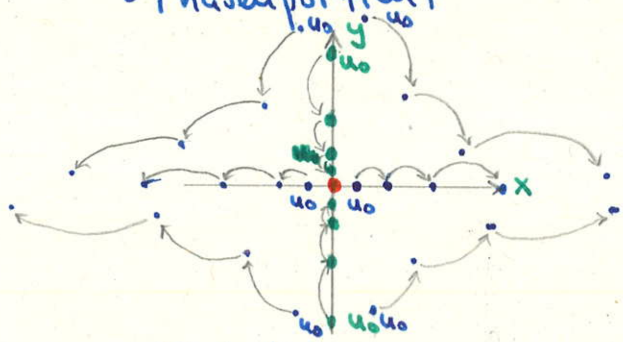
$$\Rightarrow \varphi^t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-2t}x_0\\e^{\frac{1}{2}t}y_0\\e^{\frac{1}{2}t}z_0\end{pmatrix}$$

zu (d): $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{n+1}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad u_n := \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = Au_n = A^{n+1}u_0$$

- Phasenportrait • Fixpunkt



- Evolutionsoperator:

$$u_n = A^n u_0 =: \varphi^n(u_0)$$

$$\Rightarrow \varphi^n(u_0) = A^n u_0 = \begin{pmatrix}2^n&0\\0&(\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}\cdot u_0$$

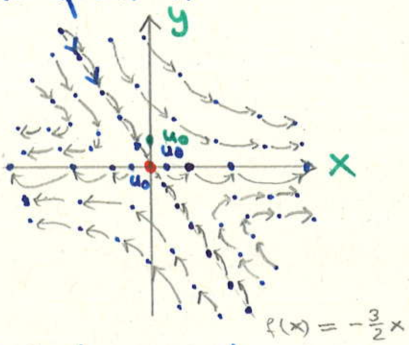
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^n x_0\\(\frac{1}{2})^n y_0\end{pmatrix}$$

zu (e): $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad u_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = A u_n = A^{n+1} u_0$$

- Phasenportrait:



• Fixpunkt

- Evolutionsoperator:

$$u_n = A^n u_0 =: \varphi^n(u_0)$$

$$\Rightarrow \varphi^n(u_0) = A^n u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \cdot u_0 = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \cdot u_0$$

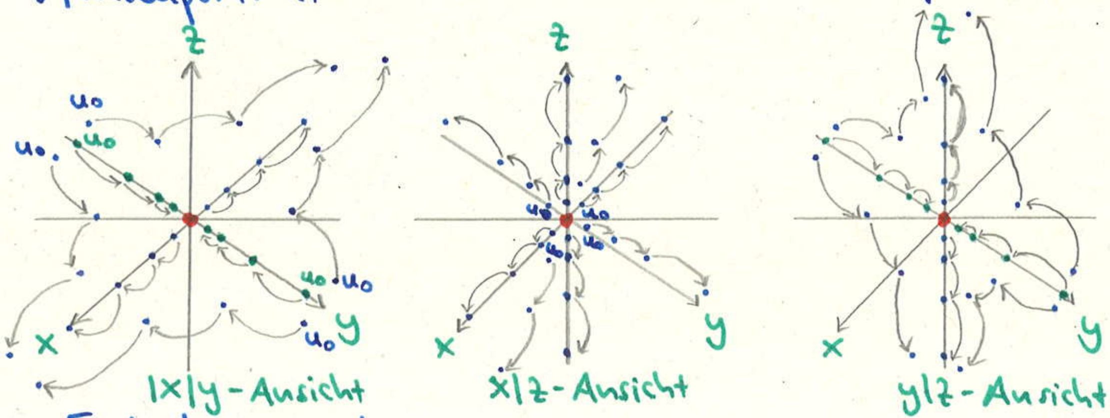
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot x_0 + \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) y_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 \end{pmatrix}$$

zu (f):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = A u_n = A^{n+1} u_0$$

- Phasenportrait:



x|y-Ansicht x|z-Ansicht y|z-Ansicht

• Fixpunkt

- Evolutionsoperator:

$$u_n = A^n u_0 =: \varphi^n(u_0)$$

$$\Rightarrow \varphi^n(u_0) = A^n u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n u_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot u_0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n x_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 \\ 2^n z_0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Gegeben: $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^{t,s}\})$ nichtautonomes dynamisches System

mit

$$\varphi^{t,t}(u) = u \quad \forall u \in X \ \forall t \in \mathbb{T} \qquad (D1')$$

$$(\varphi^{t,s} \circ \varphi^{s,r})(u) = \varphi^{t,r}(u) \ \forall u \in X \ \forall t-s, s-r, r \in \mathbb{T} \qquad (D2')$$

wobei

X : Zustandsmenge (Zustandsraum, Phasenraum)

$\mathbb{T}$: Kommutative Halbgruppe („Menge aller möglichen Zeitpunkte)

$\varphi^{t,s}: X \to X$ mit $u \mapsto \varphi^{t,s}(u) \quad \forall s, t-s \in \mathbb{T}$

Zeige:

1. $(\mathbb{T} \times X, \mathbb{T}, \{\phi^t\})$ ist ein dynamisches System, wobei $\{\phi^t\}$ durch
$$\phi^t(\tau, u) := \left(t+\tau, \varphi^{t+\tau,\tau}(u)\right) \quad \forall (\tau,u) \in \mathbb{T}\times X \ \forall t \in \mathbb{T}$$
2. $f(\tau,u)$ ist infinitesimaler Erzeuger von $(\mathbb{R}^m, \mathbb{T}, \{\varphi^{t,s}\})$, $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$

$\Leftrightarrow$ $(1, f(\tau,u))$ ist infinitesimaler Erzeuger von $(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^m, \mathbb{T}, \{\phi^t\})$, $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$

Lösung:

Teil 1: (a): $\mathbb{T}$ ist nach Voraussetzung eine Kommutative Halbgruppe.

(b): $\mathbb{T} \times X$ ist nach Voraussetzung ein topologischer Raum.

(c): zz: $\phi^0(\tau,u) = (\tau,u) \quad \forall (\tau,u) \in \mathbb{T}\times X$

Bew.: $\phi^0(\tau,u) \underset{\text{Def.}}{=} \left(0+\tau, \varphi^{0+\tau,\tau}(u)\right) \underset{(D1')}{=} (\tau, u) \quad \forall (\tau,u)\in \mathbb{T}\times X$

(d): zz: $(\phi^t \circ \phi^s)(\tau,u) = \phi^{t+s}(\tau,u) \quad \forall (\tau,u) \in \mathbb{T}\times X \ \forall s,t \in \mathbb{T}$

Bew.: $\phi^{t+s}(\tau,u) \underset{\text{Def.}}{=} \left(t+s+\tau, \varphi^{t+s+\tau,\tau}(u)\right)$

$$\underset{(D2')}{=} \left(t+s+\tau, (\varphi^{t+s+\tau,s+\tau} \circ \varphi^{s+\tau,\tau})(u)\right)$$

$r := \tau$, $s := s+\tau$, $t := t+s+\tau$ (denn: $(t+s+\tau) - (s+\tau) = t \in \mathbb{T}$
$(s+\tau) - \tau = s \in \mathbb{T}$
$\tau \in \mathbb{T}$)

$$\underset{\text{Def.}}{=} \phi^t\left(s+\tau, \varphi^{s+\tau,\tau}(u)\right)$$

$$= (\phi^t \circ \phi^s)(\tau,u) \quad \forall (\tau,u)\in\mathbb{T}\times X \ \forall s,t \in \mathbb{T}$$

$\Rightarrow (\mathbb{T}\times X, \mathbb{T}, \{\phi^t\})$ ist DS

Teil 2: $X = \mathbb{R}^m$, $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$

ϕ^t diffbar in $t \in \mathbb{T}$ $\forall (\tau,u_0) \in \mathbb{T}\times X$ (nach Vor.)

$$g(\tau,u_0) := \left[\frac{\partial}{\partial t}\phi^t(\tau,u_0)\right]_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\phi^{h}(\tau,u_0) - \phi^{0}(\tau,u_0)\right)$$

($0+h$)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\left(h+\tau, \varphi^{h+\tau,\tau}(u_0)\right) - (\tau,u_0)\right)$$

Def ϕ^t & $(\mathbb{T}\times X, \mathbb{T}, \{\phi^t\})$ DS

$$= \lim_{h\to 0} \left(1, \frac{1}{h}\left(\varphi^{h+\tau,\tau}(u_0) - u_0\right)\right)$$

$$=: (1, f(\tau,u_0))$$