Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 2
15.4.2011

Abgabe: Freitag, 29.4.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 4: Sei $N \in \mathbb{N}$ und S_N die Menge der biunendlichen Folgen mit Symbolen aus

$$\{0, \dots, N-1\} =: [N],$$

d. h.

$$S_N = [N]^{\mathbb{Z}} = \big\{u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} : u_i \in \{0, \dots, N-1\}\big\}.$$

Zeigen Sie, dass S_N ein vollständiger metrischer Raum wird durch

$$d(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| 3^{-|i|}$$

und dass der Verschiebeoperator (Shift)

$$\big(\varphi(u)\big)_i = u_{i+1}, \quad u \in S_N, \quad i \in \mathbb{Z}$$

ein diskretes, invertierbares und stetiges dynamisches System auf S_N definiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $(X, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}})$ ein separat stetiges dynamisches System und seien $\#X > 1$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Dann gilt für alle $u \in X$ eine der folgenden Alternativen:

(i) $\gamma(u)$ ist schließlich fix, d. h. es existiert ein $s \in \mathbb{T}$ mit $\varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$ für alle $t \geq 0, t \in \mathbb{T}$.

(ii) $\gamma(u)$ ist schließlich periodisch, d. h. es existiert ein $s \in \mathbb{T}$, so dass $\gamma(\varphi^s(u))$ ein periodischer Orbit ist.

(iii) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T} & \to & X \\ t & \mapsto & \varphi^t(u) \end{array}$$

ist injektiv.

(6 Punkte)

Aufgabe 6: Gegeben sei das durch die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{mit} \quad f(u) = \lambda u(1-u), \quad n \in \mathbb{N}$$

erzeugte dynamische System auf $X = [0,1]$.

(a) Beweisen Sie, dass f auf X eine Selbstabbildung für $\lambda \in [1,4]$ ist.

(b) Für welche $\lambda \in [1,4]$ besitzt das dynamische System einen zwei-periodischen Orbit $\{u_-(\lambda), u_+(\lambda)\}$?

(c) Geben Sie $\{u_-(\lambda), u_+(\lambda)\}$ für $\lambda = \frac{10}{3}$ explizit an.

(d) Zeigen Sie, dass die Iteration zum Startwert $u_0 = 1 - u_-(\lambda)$ schließlich zwei-periodisch wird.

(6 Punkte)

Aufgabe 7: Gegeben seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit

$$(f(u), u)_2 \leq \alpha - \beta\, ||u||_2^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

wobei $(\cdot,\cdot)_2$ das euklidische innere Produkt bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass es ein R_0 gibt, so dass die Kugeln

$$K_R = \{u \in \mathbb{R}^m : ||u||_2 \leq R\}$$

für $R \geq R_0$ positiv invariant für das durch $\dot{u} = f(u)$ erzeugte (lokale) dynamische System sind.

(b) Beweisen Sie, dass es zu jedem $R \geq R_0$ ein $h_0 = h_0(R) > 0$ gibt, so dass K_R auch für die Euler Abbildung

$$\Phi_h(u) = u + h\, f(u), \; 0 < h \leq h_0$$

positiv invariant ist. Kann man h_0 stets unabhängig von R wählen?

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

$N \in \mathbb{N}$

$[N] := \{0, 1, \dots, N-1\}$ Menge der Symbole

$S_N := [N]^{\mathbb{Z}} := \{ u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid u_i \in \{0, \dots, N-1\} = [N] \}$ Menge biunendlicher Folgen mit Symbolen ($\hat{=}$ Folgengliedern) aus $[N]$

$d(u,v) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|}$ Metrik auf S_N

$(\varphi(u))_i := u_{i+1} \quad \forall u \in S_N \quad i \in \mathbb{Z}$ Verschiebeoperator (Shift)

Zeige:

(1): (S_N, d) ist ein vollständiger metrischer Raum

(2): $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^i)_{i \in \mathbb{Z}})$ ist ein diskretes, invertierbares & stetiges dynamisches System

zu (1): (S_N, d) ist genau dann ein metrischer Raum, wenn

(A): $d(u,u) = 0 \quad \forall u \in S_N$

(B): $d(u,v) = 0 \Rightarrow u = v \quad \forall u,v \in S_N$

(C): $d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u,v \in S_N$

(D): $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \forall u,v,w \in S_N$

zu (A):

$$d(u,u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{|u_i - u_i|}_{=0 \ \forall i \in \mathbb{Z}} \cdot 3^{-|i|} = 0 \quad \forall u \in S_N$$

zu (B): Sei $d(u,v) = 0$, dann gilt (aufgrund der Nichtnegativität der Summanden)

$$0 \overset{!}{=} d(u,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{|u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|}}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow |u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|} = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |u_i - v_i| = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow u_i - v_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

Damit gilt $u_i = v_i \ \forall i \in \mathbb{Z}$ und folglich $u = v$. $\forall u,v \in S_N$

zu (C):

$$d(u,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |v_i - u_i| \cdot 3^{-|i|} = d(v,u) \quad \forall u,v \in S_N$$

zu (D):

$$d(u,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |(u_i - w_i) + (w_i - v_i)| \cdot 3^{-|i|}$$

$$\underset{\Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - w_i| \cdot 3^{-|i|} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w_i - v_i| \cdot 3^{-|i|} = d(u,w) + d(w,v)$$

$\forall u,v,w \in S_N$

Damit ist (S_N, d) ein metrischer Raum. Kommen wir nun zur Vollständigkeit:

zz: $\forall (u^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_N$ Cauchy-Folge $\exists u \in S_N : \lim_{n\to\infty} d(u^n,u) = 0$

Beweis: Sei $(u^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_N$ eine beliebige Cauchy-Folge in S_N. Dann gilt insbesondere, dass $(u_i^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [N]$ eine Cauchy-Folge in $[N]$ ist $\forall i \in \mathbb{Z}$, d.h. nach Definition einer Cauchy-Folge gilt (für jedes $i\in\mathbb{Z}$)

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \underset{\in\mathbb{N}}{m_i}\ \forall n,m \geq m_i : |u_i^m - u_i^n| < \varepsilon$$

Wählen wir $\varepsilon < 1$, so bedeutet dies, dass die Folge $(u_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab einem Index m_i konstant wird, d.h.

$$u_i^n =: u_i \in [N] \quad \forall i \in \mathbb{Z}\ , \text{ wobei } n \geq m_i \text{ beliebig.}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine beunendliche Folge $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in S_N$.
Es bleibt die Konvergenz zu zeigen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{\bar{n}(\varepsilon)}{\overset{\parallel}{\bar{n}}} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \bar{n} : d(u^n,u) \leq \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zunächst $K = K(\varepsilon,N) \in \mathbb{N}$ derart, d.h. „so groß", dass

$$2(N-1)\sum_{i=K}^{\infty} 3^{-i} = 2(N-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^{-K+1} = (N-1)\cdot 3^{-K+1} \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\Big(\Leftrightarrow 3^{-K+1} < \frac{\varepsilon}{N-1} \Leftrightarrow \exp((1-K)\cdot\ln 3) < \frac{\varepsilon}{N-1}$$
$$\Leftrightarrow (1-K)\cdot \ln 3 < \ln\left(\frac{\varepsilon}{N-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow (1-K) < \frac{\ln\varepsilon - \ln(N-1)}{\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow K > 1 - \frac{\ln\varepsilon - \ln(N-1)}{\ln 3} = \frac{\ln 3 - \ln\varepsilon + \ln(N-1)}{\ln 3} = \frac{\ln\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) + \ln(N-1)}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}\cdot\ln\left(\frac{3(N-1)}{\varepsilon}\right) \Big)$$

Nun wähle $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$\bar{n} := \sup\{m_i \mid i\in\mathbb{Z},\ |i| \leq K-1\} < \infty$$

Dann gilt $\forall n \geq \bar{n}$:

$$d(u^n,u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i^n - u_i|\cdot 3^{-|i|}$$
$$= \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ |i|\leq K-1}} \underbrace{|u_i^n - u_i|}_{\substack{=0\\ \uparrow\\ \text{da } n\geq\bar{n}\\ \text{und nach Def. von } u_i}}\cdot 3^{-|i|} + \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ |i|\geq K}} \underbrace{|u_i^n - u_i|}_{\leq N-1}\cdot 3^{-|i|}$$
$$\leq (N-1)\cdot \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ |i|\geq K}} 3^{-|i|} = 2\cdot(N-1)\cdot\sum_{i=K}^{\infty} 3^{-i}$$
$$= (N-1)\cdot 3^{1-K} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Wahl}\\ \text{von } K}}{<} \varepsilon$$

zu ②: Wir zeigen folgende Schritte:

Ⓐ: $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ diskretes dynamisches System

Ⓑ: $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ ist invertierbares DS

Ⓒ: $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ ist stetiges DS

zu Ⓐ:

1. $\mathbb{Z}$ ist eine kommutative Halbgruppe (sogar eine Gruppe) und (S_N, d) ist ein vollständiger metrischer Raum (siehe ①)

2. „Anfangswerteigenschaft" $(\varphi^t(u))_i := u_{i+t}$

$$(\varphi^0(u))_i = u_{i+0} = u_i \; \forall i\in\mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \varphi^0(u) = u \quad \forall u\in S_N$$

3. „Kozykluseigenschaft":

$$\begin{aligned}((\varphi^t\circ\varphi^s)(u))_i &= (\varphi^t(\varphi^s(u)))_i\\ &= (\varphi^t(u_{\cdot+s}))_i\\ &= (u_{\cdot+s+t})_i\\ &= u_{i+s+t}\end{aligned}$$

$$(\varphi^{s+t}(u))_i = u_{i+s+t} \qquad \forall i\in\mathbb{Z}\; \forall s,t\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (\varphi^t\circ\varphi^s)(u) = \varphi^{s+t}(u) \quad \forall u\in S_N \; \forall s,t\in\mathbb{Z}$$

Folglich ist $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ ein dynamisches System (insbesondere ist dies wegen $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ diskret)

zu Ⓑ:

Definiere
$$(\varphi^t)^{-1}(u) := \varphi^{-t}(u) \quad \forall t\in\mathbb{Z}$$
dann gilt
$$((\varphi^t\circ\varphi^{-t})(u))_i = u_{i+t+(-t)} = u_i = u_{i+(-t)+t} = ((\varphi^{-t}\circ\varphi^t)(u))_i$$
$\forall i\in\mathbb{Z}\;\forall t\in\mathbb{Z}$

damit ist φ^t bijektiv mit der Umkehrabbildung $(\varphi^t)^{-1} := \varphi^{-t}$, $t\in\mathbb{Z}$. Folglich ist $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ ein invertierbares DS.

Kürzer: $\left.\begin{array}{l}\mathbb{T}:=\mathbb{Z} \text{ Komm. Gruppe}\\ (S_N,\mathbb{Z},(\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}}) \text{ DS}\end{array}\right\} \Rightarrow (S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ invertierbar

zu Ⓒ: Da $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{Z}})$ ein „diskretes" DS ist, gilt

$t \mapsto \varphi^t(u)$ ist <u>immer</u> stetig (und diskrete Topologie)

Es genügt daher die Stetigkeit in u zu zeigen. Wir zeigen sogar Lipschitz-Stetigkeit, d.h.

$$\forall t\in\mathbb{Z}\; \exists \underset{L(t)}{\overset{}{\underset{\parallel}{L}}} \geq 0\; \forall u,v\in S_N : d(\varphi^t(u), \varphi^t(v)) \leq L\cdot d(u,v)$$

Sei $t \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest. Wähle $L := L(t) := 3^{|t|}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& d\left(\varphi^t(u), \varphi^t(v)\right) \\
&= d\left(u_{\cdot + t}, v_{\cdot + t}\right) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+t} - v_{i+t}| \cdot 3^{-|i|} \\
&\underset{\text{umnum.}}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j - v_j| \cdot 3^{-|j-t|} && , \; i+t =: j \; (\Rightarrow i = j-t) \\
&\underset{\text{umgek. Δ'sungl.}}{\leq} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j - v_j| \cdot 3^{|t|} \cdot 3^{-|j|} && , \; |j-t| \geq |j| - |t| \\
& && (\Rightarrow -|j-t| \leq |t| - |j| \\
& && \Rightarrow 3^{-|j-t|} \leq 3^{|t|} \cdot 3^{-|j|}) \\
&= 3^{|t|} \cdot d(u,v) \quad \forall u,v \in S_N
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5:

$(X, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}})$ separat stetiges dynamisches System

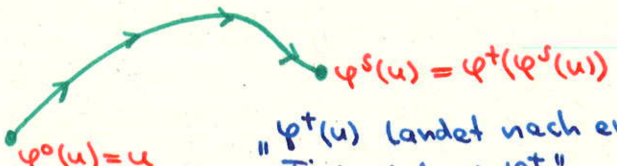
$\# X > 1$

$\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}_+\}$

Zeige: $\forall u \in X$ gilt eine der folgende Aussagen

(A): $\gamma(u)$ ist „schließlich fix", d.h.

$$\exists s \in \mathbb{T}\ \forall t \in \mathbb{T}\ (t \geq 0): \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$$

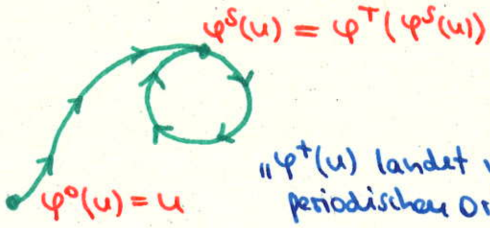


„$\varphi^t(u)$ landet nach endlicher Zeit $s \in \mathbb{T}$ in einem Fixpunkt von φ^t"

(B): $\gamma(u)$ ist „schließlich periodisch", d.h.

$\exists s \in \mathbb{T}: \gamma(\varphi^s(u))$ ist ein periodischer Orbit

(d.h. $\exists s \in \mathbb{T} \wedge \exists T \in \mathbb{T}$ mit $T > 0$: $\varphi^{t+T}(\varphi^s(u)) = \varphi^t(\varphi^s(u))$ $\forall t \in \mathbb{T}$
und $\varphi^t(\varphi^s(u)) \neq \varphi^s(u)$ $\forall t \in \mathbb{T}$ mit $0 < t < T$)



„$\varphi^t(u)$ landet nach endlicher Zeit $s \in \mathbb{T}$ auf einen periodischen Orbit von φ^t"

(C): Die Abbildung

$$\mathbb{T} \to X \quad \text{mit} \quad t \mapsto \varphi^t(u)$$

ist (für jedes feste $u \in X$) injektiv,

„$\varphi^t(u)$ nimmt als Funktion von $t \in \mathbb{T}$ keine Funktionswerte mehrfach an"

wobei

$$\gamma(u) := \{\varphi^t(u) \in X \mid t \in \mathbb{T}\} \subset X \quad \text{heißt Orbit von } \varphi \text{ in } u$$

Beweis: Seien (A) und (C) nicht erfüllt, d.h. es gilt

(1): $\forall s \in \mathbb{T}\ \exists t \in \mathbb{T}: \varphi^t(\varphi^s(u)) \neq \varphi^s(u)$

(2): $\mathbb{T} \to X$ mit $t \mapsto \varphi^t(u)$ ist nicht injektiv

Wegen (2) und $\# X > 1$ gilt

$$\exists s, \tau \in \mathbb{T} \text{ mit } s < \tau: \varphi^\tau(u) = \varphi^s(u)$$

(Hinweis: Da $s < \tau$ gilt, können wir τ auch schreiben als $\tau = s + t$ mit $t \in \mathbb{T}$ und $t > 0$, d.h. wiederum

$$\exists s, t \in \mathbb{T} \text{ mit } t > 0: \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)\ )$$

Wir definieren nun

$$T := \inf\{t \in \mathbb{T} \text{ mit } t > 0 \mid \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)\}$$

Als nächstes zeigen wir, dass $T>0$ gilt und $\gamma(\varphi^s(u))$ ein periodischer Orbit ist.

Diskret: $(\mathbb{T}=\mathbb{N})$

zz: • $\varphi^{t+T}(\varphi^s(u)) = \varphi^t(\varphi^s(u)) \quad \forall t\in\mathbb{N}$

• $T>1$

• Nach der Definition von T gilt $\varphi^T(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$. Daraus erhalten wir

$$\varphi^{t+T}(\varphi^s(u)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kozyklus-}\\ \text{eigenschaft}}}{=} \varphi^t(\underbrace{\varphi^T(\varphi^s(u))}_{\substack{=\varphi^s(u)\\ \uparrow \text{Def. von } T}}) = \varphi^t(\varphi^s(u)) \quad \forall t\in\mathbb{N}$$

Damit ist $\gamma(\varphi^s(u))$ ein periodischer Orbit, sobald $T>1$ gilt.

• Da $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ diskret ist, gilt offensichtlich $T\geqslant 1$. Weiter gilt $T>1$, denn: Angenommen $T=1$, dann gilt nach der Definition von T

$$\varphi(\varphi^s(u)) = \varphi^1(\varphi^s(u)) \underset{\substack{\uparrow\\ T=1}}{=} \varphi^T(\varphi^s(u)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def. von } T}}{=} \varphi^s(u)$$

$$\Rightarrow \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u) \quad \forall t\in\mathbb{N}$$

(d.h. $\exists s\in\mathbb{N}\ \forall t\in\mathbb{N}\ (t\geqslant 0): \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$)

$\Rightarrow \gamma(u)$ ist schließlich fix $\lightning$ zu ①

Damit gilt $T>1$ (also $T\geqslant 2$) und somit ist $\gamma(u)$ schließlich periodisch.

Kontinuierlich: $(\mathbb{T}=\mathbb{R}_+)$

zz: • $\varphi^{t+T}(\varphi^s(u)) = \varphi^t(\varphi^s(u)) \quad \forall t\in\mathbb{R}_+$

• $T>0$

• Wähle $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ beliebig mit $t_n \xrightarrow{n\to\infty} T$, $t_n > T \ \forall n\in\mathbb{N}$ und $\varphi^{t_n}(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$, dann erhalten wir aus der separaten Stetigkeit

$$\varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^t(\underbrace{\varphi^{t_n}(\varphi^s(u))}_{=\varphi^s(u)}) = \varphi^{t+t_n}(\varphi^s(u)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{sep. stetig}} \varphi^{t+T}(\varphi^s(u)) \quad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^{t+T}(\varphi^s(u)) \quad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

Damit ist $\gamma(\varphi^s(u))$ ein periodischer Orbit, sobald $T>0$ gilt.

• Angenommen $T=0$, so folgt aus der Definition von T

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists z_n \in\,]0,\tfrac{1}{n}[\, : \varphi^{z_n}(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$$

Sei $t\in\mathbb{R}_+$ beliebig, dann existiert eine Zerlegung

$$t = m_n\cdot z_n + y_n \quad , \ m_n\in\mathbb{N}, \ 0\leqslant y_n < z_n$$

Hieraus und aus der separaten Stetigkeit folgt

$$\varphi^t(\varphi^s(u)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Darst. von } t}}{=} \varphi^{m_n z_n + y_n}(\varphi^s(u))$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kozyklus-}\\ \text{eigenschaft}}}{=} \varphi^{y_n}(\underbrace{\varphi^{m_n z_n}(\varphi^s(u))}_{=\varphi^s(u)}) = \varphi^{y_n}(\varphi^s(u)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{sep. stetig}} \varphi^0(\varphi^s(u)) \underset{\text{Anf.werteig.}}{=} \varphi^s(u)$$

(denn: $\varphi^{z_n}(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$ und $\varphi^{m_n z_n}(\varphi^s(u)) = (\underbrace{\varphi^{z_n}\circ\dots\circ\varphi^{z_n}}_{m_n\in\mathbb{N}\text{-mal}})(\varphi^s(u))$)

$$\Rightarrow \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u) \quad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

(d.h. $\exists s\in\mathbb{R}_+\ \forall t\in\mathbb{R}_+\ (t\geqslant 0): \varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$)

$\Rightarrow \gamma(u)$ ist schließlich fix $\lightning$ zu ①

Damit gilt $T>0$ und somit ist $\gamma(u)$ schließlich periodisch.

Angenommen $\gamma(u)$ ist nicht „schließlich periodisch", so folgt dass Ⓐ oder Ⓒ gelten muss.

gezeigt: „$\neg$Ⓐ $\wedge$ $\neg$Ⓒ $\Rightarrow$ Ⓑ"
$\Updownarrow$ Negation (⇝ Aussagenlogik)
„Ⓐ $\vee$ Ⓒ $\Leftarrow$ $\neg$Ⓑ"

Aufgabe 6:

Betrachte das (diskrete) dynamische System $([0,1], \mathbb{N}, (f^n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit

$$u_{n+1} = f(u_n) = \lambda \cdot u_n \cdot (1-u_n)$$

Zeige:

(a): $\forall \lambda \in [1,4]$: f ist eine Selbstabbildung auf $[0,1]$
(d.h. $\forall u \in [0,1] : f(u) \in [0,1]$)

(b): Für welche $\lambda \in [1,4]$ besitzt $([0,1], \mathbb{N}, (f^n)_{n\in\mathbb{N}})$ einen 2-periodischen Orbit $\{u_-(\lambda), u_+(\lambda)\}$?

(c): Bestimme $u_-(\lambda)$ und $u_+(\lambda)$ für $\lambda = \frac{10}{3}$.

(d): Zeige, dass die Iteration zum Startwert $u_0 = 1 - u_-(\lambda)$ schließlich 2-periodisch ist (insofern λ wie in (b) gewählt wird).

zu (a): Zunächst gilt

$$f(u) = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \cdot \underbrace{u}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1 \underbrace{- \underbrace{u}_{\leq 1}}_{\geq -1})}_{\geq 0} \underset{\lambda \geq 0}{\geq} 0 \quad \forall u \in [0,1] \ \forall \lambda \in [1,4]$$

Desweiteren ist f eine nach unten geöffnete Parabel (Polynom 2ten Grades) mit $f(0) = f(1) = 0$. Ihr Maximum befindet sich bei $u = \frac{1}{2}$, denn (Kurvendiskussion)

$$f'(u) = \lambda(1-2u) \overset{!}{=} 0 \iff u = \frac{1}{2}$$

$$f''(u) = -2\lambda \underset{\lambda>0}{<} 0 \quad \Rightarrow f''(\tfrac{1}{2}) = -2\lambda < 0 \quad \Rightarrow \text{bei } u = \tfrac{1}{2} \text{ liegt Maximum vor}$$

Daher gilt

$$f(u) \leq f(\tfrac{1}{2}) = \lambda \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1 - \tfrac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4} \underset{\lambda \leq 4}{\leq} 1 \quad \forall u \in [0,1] \ \forall \lambda \in [1,4]$$

Insgesamt gilt somit

$$0 \leq f(u) \leq 1 \quad \forall u \in [0,1] \ \forall \lambda \in [1,4]$$

Damit ist f für jedes $\lambda \in [1,4]$ eine Selbstabbildung von $[0,1]$.

zu (b): Aus Übungsgründen berechnen wir zunächst die Fixpunkte von f:

Fixpunkte: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} =: \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} u &\overset{!}{=} f(u) = \lambda \cdot u \cdot (1-u) \\ \iff 0 &= \lambda \cdot u \cdot (1-u) - u \\ &= (\lambda \cdot (1-u) - 1) \cdot u \\ &= -\lambda \cdot \left(u - \frac{\lambda-1}{\lambda}\right) \cdot u \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fixpunkte: $u_1^* = 0$ und $u_2^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

Insbesondere gilt:

- $\lambda = 1 \Rightarrow u_1^* = u_2^* = 0$ (1 Fixpunkt)
- $\lambda \neq 1 \Rightarrow u_1^*, u_2^*$ (2 Fixpunkte, davon einer nichttrivial)

2-periodischer-Orbit: Für einen 2-periodischen Orbit müssen die folgenden Eigenschaften gelten:

$$(1): \quad f(f(u)) = u \qquad \text{(2-periodisch)}$$

$$(2): \quad f(u) \neq u \qquad \text{(u kein Fixpunkt)}$$

$f(u_+) = u_-$
$f(u_-) = u_+$
$\Leftrightarrow f(f(u_\pm)) = u_\pm$ und $f(u_\pm) \neq u_\pm$

Die Berechnung von (1) liefert

$$u = f(f(u))$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(f(u)) - u$$

$$= -\lambda^3 \cdot u \cdot \left(u - \frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\cdot\left(u - \frac{\lambda+1+\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}\right)\cdot\left(u - \frac{\lambda+1-\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow u \in \left\{0, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \underbrace{\frac{\lambda+1+\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}}_{=:u_+}, \underbrace{\frac{\lambda+1-\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}}_{=:u_-}\right\}$$

Fixpunkte!
d.h. $f(0) = 0$
und $f(\frac{\lambda-1}{\lambda}) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$

Beachte: $\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3$ (oder $\lambda \leq -1$)
Im Fall $\lambda = 3$ gilt $u_+ = u_-$, womit wir einen weiteren Fixpunkt hätten.

Einfaches Nachrechnen zeigt

$$f(f(u_\pm)) = u_\pm \quad \text{und} \quad f(u_\pm) = u_\mp \neq u_\pm$$

Daher ist $\{u_+, u_-\}$ ein 2-periodischer Orbit des DS $([0,1], \mathbb{N}, (f^n)_{n\in\mathbb{N}})$, insofern $\lambda \in]3,4]$ gewählt wurde.

zu (c):

$$u_+ = \frac{13+\sqrt{13}}{20} \approx 0.8302775638$$

$$u_- = \frac{13-\sqrt{13}}{20} \approx 0.4697224362$$

zu (d):

$$u_0 := 1 - u_-$$

$$u_1 = \lambda \cdot u_0 \cdot (1-u_0)$$

$$= \lambda \cdot (1-u_-) \cdot (1-(1-u_-))$$

$$= \lambda \cdot u_- \cdot (1-u_-)$$

$$= f(u_-) \overset{!}{=} u_+$$

$$u_2 = u_-$$

$$u_3 = u_+$$

$$\vdots$$

Damit gilt:

$f^{n+2}(u_+) = f^n(u_+) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists\, 1 = s \in \mathbb{N} \wedge \exists\, 2 = T \in \mathbb{N}\ (T>0): \quad f^{n+T}(f^s(u)) = f^n(f^s(u)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

und $\quad f^n(f^s(u)) \neq f^s(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $0<n<T$

$u_- = f(u_+) \neq u_+$

Aufgabe 7:

$m \in \mathbb{N}$

$f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

$\exists \underset{(\alpha,\beta \in \mathbb{R})}{\alpha, \beta > 0}\ \forall u \in \mathbb{R}^m : \ (f(u), u)_2 \leq \alpha - \beta \cdot |u|^2$

Zeige:

1: $\exists R_0 > 0\ \forall R \geq R_0 : K_R := \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u| \leq R\}$ ist positiv invariant

2: (a) $\forall R \geq R_0\ \exists h_0 = h_0(R) > 0 : K_R := \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u| \leq R\}$ ist positiv invariant

für $\phi_h(u) := u + h \cdot f(u)$, $0 < h \leq h_0$

(Euler Abbildung)

(b) Kann man h_0 immer unabhängig von R wählen?

zu 1: Wir verwenden den Satz 4.3 „Invariantkriterium für Niveaumengen“:
Zunächst sollten die Voraussetzungen überprüft werden:

Voraussetzungen:

1. $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und f ist lokal Lipschitz-stetig

Beweis: Wegen $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ist die erste Eigenschaft trivialerweise erfüllt.
Für die lokale Lipschitz-Stetigkeit ist Folgendes zu zeigen

$$\forall u \in \mathbb{R}^m\ \exists U = U(u) \subset \mathbb{R}^m : f|_U \text{ ist Lipschitz-stetig}$$

Sei $u \in \mathbb{R}^m$ beliebig und $U_\varepsilon := \{v \in \mathbb{R}^m \mid |u - v| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^m$ $(\varepsilon > 0)$ eine beliebige Umgebung von u. Dann folgt aus $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und aus dem Mittelwertsatz (für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen):

$$|f(u) - f(v)| \underset{\substack{MWS \\ f \in C^1}}{=} \left| \int_0^1 Df(v + t(u-v))\,dt \right| \cdot |u - v|$$

$$\leq \int_0^1 |Df(v + t(u-v))|\,dt \cdot |u - v|$$

$$\leq \underbrace{\left(\max_{t \in [0,1]} |Df(v + t(u-v))| \right)}_{=:L\ \underset{\substack{\uparrow \\ Df \in C^0 \text{ stetig auf Kompaktum}}}{<} \infty} \cdot |u - v|$$

2. Definiere

$$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ mit } V(u) := |u|^2 - R^2 \quad , \ R > 0$$

$V \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$: Da alle partiellen Ableitungen existieren

$$\frac{\partial}{\partial u_i} V(u) = \frac{\partial}{\partial u_i}\left[\left(\sum_{j=1}^m u_j^2\right) - R^2\right] = 2u_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad (\Rightarrow \nabla V(u) = 2u)$$

und insbesondere stetig sind (denn: $\nabla V(u) = 2u \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$) gilt $V \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

Weiter gilt $V'(u) \neq 0$, falls $V(u) = 0$, denn

$$0 \stackrel{!}{=} V(u) = |u|^2 - R^2 \implies u \in \partial B_R(0) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u| = R\}$$

$$\implies |\nabla V(u)| = |2u| = 2|u| = 2R \underset{R>0}{\neq} 0 \quad \forall u \in \partial B_R(0)$$

$$\implies \nabla V(u) \neq 0 \quad \forall u \in \partial B_R(0)$$

Zurück zum Satz:

zz: $\forall u \in \mathbb{R}^m$ mit $V(u) = 0$: $\nabla V(u)^T \cdot f(u) \leq 0$

Wegen

$$0 \stackrel{!}{=} V(u) = |u|^2 - R^2 \iff u \in \partial B_R(0)$$

wähle $u \in \mathbb{R}^m$ mit $|u| = R$ beliebig und wähle $R \geq R_0 := \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \underset{\alpha,\beta>0}{>} 0$

$$\begin{aligned}
[\nabla V(u)]^T \cdot f(u) &= [2u]^T \cdot f(u) \\
&= 2 \cdot (u, f(u))_2 = 2 \cdot (f(u), u)_2 \\
&\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} 2 \cdot (\alpha - \beta |u|^2) \\
&= 2 \cdot (\alpha - \beta R^2) \\
&\leq 2 \cdot \underbrace{\left(\alpha - \beta \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right)}_{=0} = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m \text{ mit } |u| = R
\end{aligned}$$

Damit gilt für $R_0 := \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} > 0$, dass die Kugeln K_R für jedes $R \geq R_0$ positiv invariant sind.

Zu ② (a) Da es sich bei dem DS um ein diskretes DS handelt, können wir das Invarianz-Kriterium für Niveaumengen nicht anwenden. Daher nutzen wir die Def. d. pos. Inv.

zz: $\forall R > R_0 \; \exists h_0 = h_0(R) > 0 \; : |\phi_h(u)| \leq R \quad \forall u \in K_R \; \forall 0 < h \leq h_0$

Wähle $R_0 := \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ und $R > R_0$ beliebig. Wegen $R > R_0$ (strikt größer) gilt

$$\exists c > 0 : R = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + c}$$

Wähle nun $h_0 := h_0(R) := \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2\beta}, \frac{2\beta c}{M_R}\right\} & \text{falls } f \not\equiv 0 \text{ auf } K_R \text{ mit } M_R := \max_{u \in K_R} |f(u)|^2 \underset{f \text{ stetig auf kompakt}}{<} \infty \\ \frac{1}{2\beta} & \text{, falls } f \equiv 0 \text{ auf } K_R \end{cases}$, dann

gilt:

$$\begin{aligned}
&|\phi_h(u)|^2 - R^2 \\
&= (\phi_h(u), \phi_h(u)) - R^2 \\
&= (u + h \cdot f(u), u + h \cdot f(u)) - R^2 \\
&= |u|^2 + \underbrace{2h(f(u), u)}_{\leq \alpha - \beta |u|^2} + h^2 |f(u)|^2 - R^2 \\
&\leq \underbrace{(1 - 2\beta h)}_{\geq 0} \underbrace{|u|^2}_{\leq R^2 = \frac{\alpha}{\beta} + c} + 2\alpha h + h^2 \underbrace{|f(u)|^2}_{\leq M_R} - \underbrace{R^2}_{= \frac{\alpha}{\beta} + c} \\
&\leq \cancel{\frac{\alpha}{\beta}} + \cancel{c} - \cancel{2h\alpha} - 2\beta c h + \cancel{2\alpha h} - \cancel{\frac{\alpha}{\beta}} - \cancel{c} + h^2 M_R \\
&\underset{h \leq h_0 \leq \frac{1}{2\beta}}{=} h \cdot \underbrace{[h M_R - 2\beta c]}_{\leq 0} \begin{cases} = -2\beta c h < 0 & \text{, falls } f \equiv 0 \text{ auf } K_R \\ \underset{h \leq h_0 \leq \frac{2\beta c}{M_R}}{\leq} 0 & \text{, falls } f \not\equiv 0 \text{ auf } K_R \end{cases}
\end{aligned}$$

$\forall u \in K_R \; \forall 0 < h \leq h_0$

Alternativ könnte man auch $M_R \leq M_R + 1$ verwenden, um die Fall=unterscheidung zu vermeiden.

(b): h_0 kann im Allgemeinen nicht unabhängig von R gewählt werden.

Beispiel: $(m=1)$

$$f(u) := -u^3$$

$$(f(u),u) = -u^4 \leq \alpha - \beta |u|^2 \quad \text{für } 0 \leq \beta \leq 1 \;, \; \alpha > \beta$$

Sei $R>0$:

$$\begin{aligned} & |\Phi_h(u)|^2 - R^2 \\ = \; & |u|^2 + 2h(f(u),u) + h^2|f(u)|^2 - R^2 \\ = \; & u^2 - 2hu^4 + h^2u^6 - R^2 \qquad =: g_h(R) \end{aligned}$$

Speziell für $|u| = R$ gilt

$$\begin{aligned} = \; & \cancel{R^2} - 2hR^4 + h^2R^6 - \cancel{R^2} \\ = \; & hR^4 \cdot (hR^2 - 2) \quad \leq 0 \iff hR^2 - 2 \leq 0 \iff h \leq \frac{2}{R^2} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jede „von R unabhängige" Wahl von h

$$\lim_{R \to \infty} g_h(R) = \infty$$

bzw. $g_h(R) > 0 \quad \forall R^2 > \frac{2}{h}$