Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 3
29.4.2011

Abgabe: Freitag, 6.5.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 8: Gegeben sei das durch

$$\varphi\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2^3\\u_1\end{pmatrix}$$

erzeugte diskrete dynamische System $(\mathbb{R}^2,\mathbb{N},\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}})$.
Bestimmen Sie die ω-Limesmenge

$$\omega(u)=\{v\in X:\ \exists n_k\in\mathbb{N},\ (k\in\mathbb{N}),\ n_k\to\infty,\varphi^{n_k}(u)\to v \text{ für } k\to\infty\}$$

für jedes $u\in X:=[-1,1]\times[-1,1]$.

(6 Punkte)

Aufgabe 9: Man betrachte das symbolische dynamische System aus Aufgabe 4.

(i) Zeigen Sie, dass es ein $u\in S_N$ gibt, dessen ω–Limesmenge ganz S_N ist, d. h.

$$\omega(u)=S_N.$$

(ii) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und periodischen Orbits. Sind diese stabil bzw. anziehend?

(6 Punkte)

Aufgabe 10: Gegeben sei das zeitdiskrete dynamische System

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N},\quad \text{mit}\quad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+2xy\\y^2+2yz\\z^2+2xz\end{pmatrix}$$

auf

$$X=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3: x,y,z\geq 0 \text{ und } x+y+z=1\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Selbstabbildung auf X ist.

(b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von f.

(c) Führen Sie numerische Tests durch, um für „charakteristische“ $u \in X$ eine Vermutung über die ω-Limesmenge $\omega(u)$ zu erhalten. (Eine formale Beantwortung dieser nicht-trivialen Frage ist nicht Gegenstand dieser Aufgabe.)

Hinweis: Numerische Tests zeigen, dass die zwei-dimensionale Fläche X bei einer Simulation im $\mathbb{R}^3$ instabil und somit *„numerisch nicht invariant“* ist.

Ausweg: Man projiziere das System in die (x, y)-Ebene mittels

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}, \quad \text{da} \quad z = 1-x-y$$

und betrachte die Abbildung F auf

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \geq 0 \text{ und } x+y \leq 1 \right\}.$$

Treffen Sie zusätzlich Vorkehrungen, falls die berechneten Orbits die Menge Y – aufgrund von Rundungsfehlern – verlassen.

(6 Punkte)

Aufgabe 8:

Gegeben: • $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, \{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}})$ diskretes dynamisches System erzeugt durch

$$\varphi^1\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}u_2^3\\u_1\end{pmatrix}$$

• ω-Limesmenge von $u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \in X := [-1,1]\times[-1,1]$

$$\omega(u) := \omega\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} := \left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in X \;\middle|\; \exists\, n_k \in \mathbb{N} \text{ mit } n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty : \varphi^{n_k}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe: Bestimme die ω-Limesmengen für jedes $u \in X$.

Motivation: Das obige diskrete dynamische System besitzt die drei Fixpunkte

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

denn:

$$\varphi^1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \varphi^1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \varphi^1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

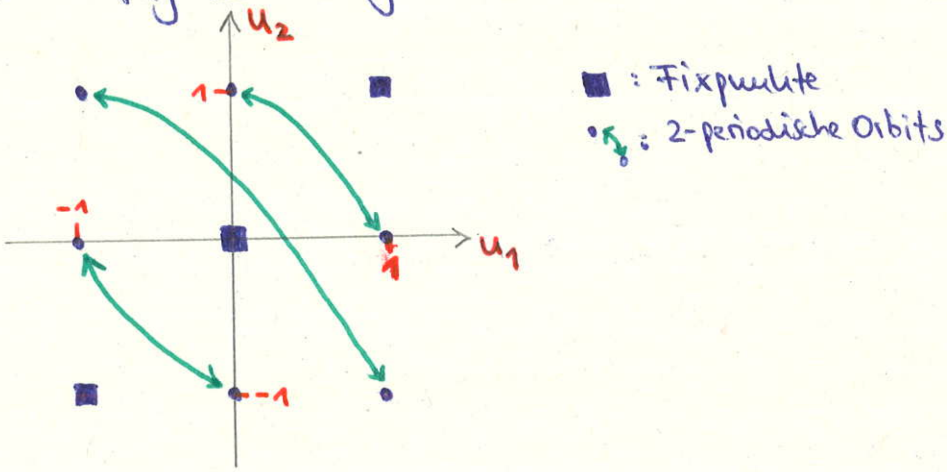
sowie die drei 2-periodischen Orbits

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

denn:

$$\varphi^1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \varphi^1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\varphi^1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\quad \varphi^1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$\varphi^1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \varphi^1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns folgendes Diagramm



Lösung: Betrachte

$$\varphi^0\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \qquad , n=0 \quad \text{(Anfangswerteigenschaft)}$$
$$\varphi^1\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2^3\\u_1\end{pmatrix} \qquad , n=1 \quad \text{(Erzeuger von } (\mathbb{R}^2,\mathbb{N},\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}})\text{)}$$
$$\varphi^2\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1^3\\u_2^3\end{pmatrix} \quad \left(\overset{!}{=} \varphi^1\begin{pmatrix}u_2^3\\u_1\end{pmatrix}\right) \qquad , n=2$$
$$\varphi^3\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2^9\\u_1^3\end{pmatrix} \quad \left(\overset{!}{=} \varphi^1\begin{pmatrix}u_1^3\\u_2^3\end{pmatrix}\right) \qquad , n=3$$
$$\varphi^4\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1^9\\u_2^9\end{pmatrix} \qquad , n=4$$
$$\varphi^5\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2^{27}\\u_1^9\end{pmatrix} \qquad , n=5$$
$$\varphi^6\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1^{27}\\u_2^{27}\end{pmatrix} \qquad , n=6$$

Hierbei stellen wir fest, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\varphi^n\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{cases}\begin{pmatrix}u_1^{(3^{\frac{n}{2}})}\\u_2^{(3^{\frac{n}{2}})}\end{pmatrix} & , n \text{ gerade}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2\\[2ex] \begin{pmatrix}u_2^{(3^{\frac{n+1}{2}})}\\u_1^{(3^{\frac{n-1}{2}})}\end{pmatrix} & , n \text{ ungerade}, n\in\mathbb{N}, n\geq 3\end{cases}$$

Betrachten wir nun $n=2K$ (falls n gerade) und $n=2K+1$ (falls n ungerade) so erhalten wir:

- $n=2K$ (d.h. n gerade) : $\varphi^{2K}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1^{\overbrace{(3^K)}^{\text{ungerade}}}\\u_2^{\underbrace{(3^K)}_{\text{ungerade}}}\end{pmatrix}$, $K\in\mathbb{N}$, $K\geq 1$
- $n=2K+1$ (d.h. n ungerade) : $\varphi^{2K+1}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2^{\overbrace{(3^{K+1})}^{\text{ungerade}}}\\u_1^{\underbrace{(3^K)}_{\text{ungerade}}}\end{pmatrix}$, $K\in\mathbb{N}$, $K\geq 1$

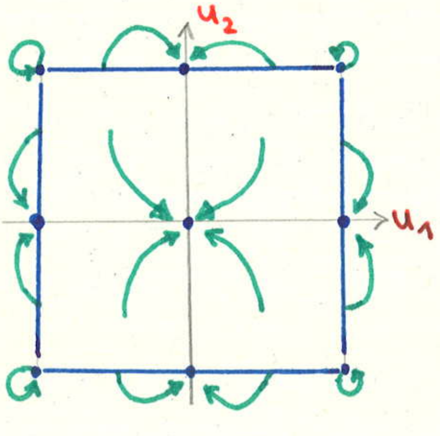
Damit sind für uns ausschließlich die Zeitfolgen

$$n_K := 2K \quad \text{und} \quad n_K := 2K+1$$

von Interesse. Wir kommen nun zur Bestimmung der Grenzwerte von φ^n (und somit zu den Elementen der ω-Limesmenge von u):

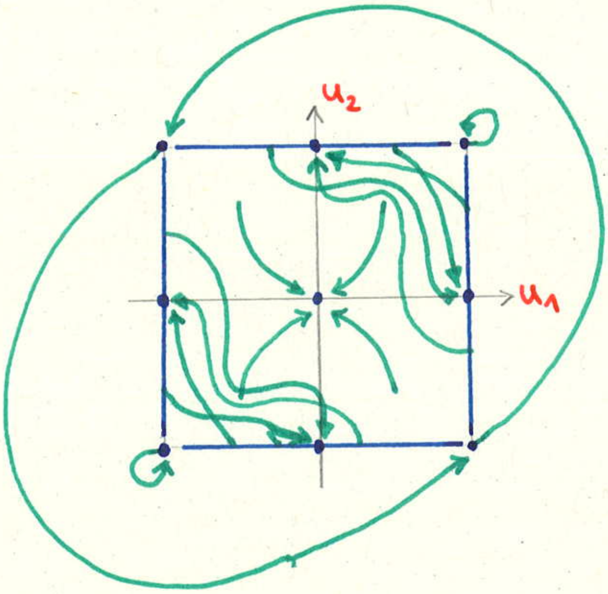
1: Sei $n_K := 2K$ ($K\in\mathbb{N}$, $K\geq 1$). Dann gilt für $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in X$:

$$\varphi^{2K}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1^{(3^K)}\\u_2^{(3^K)}\end{pmatrix} \xrightarrow{K\to\infty} \begin{cases}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1,u_2\in\,]-1,1[\text{ (innen)}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1\in\,]-1,1[,\ u_2=1 \text{ (Kante oben)}\\ \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1\in\,]-1,1[,\ u_2=-1 \text{ (Kante unten)}\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1=1,\ u_2\in\,]-1,1[\text{ (Kante rechts)}\\ \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1=-1,\ u_2\in\,]-1,1[\text{ (Kante links)}\\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1=u_2=1 \text{ (Ecke oben rechts)}\\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1=1,\ u_2=-1 \text{ (Ecke unten rechts)}\\ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1=-1,\ u_2=1 \text{ (Ecke oben links)}\\ \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} & , \text{falls } u_1=u_2=-1 \text{ (Ecke unten links)}\end{cases}$$



2: Sei $n_k := 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$). Dann gilt für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in X$:

$$\varphi^{2k+1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(3^{k+1})} \\ u_1^{(3^k)} \end{pmatrix} \xrightarrow{k \to \infty} \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1, u_2 \in]-1,1[\\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 \in]-1,1[,\ u_2 = 1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 \in]-1,1[,\ u_2 = -1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 = 1,\ u_2 \in]-1,1[\\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 = -1,\ u_2 \in]-1,1[\\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 = u_2 = 1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 = -1,\ u_2 = 1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1 = u_2 = -1 \end{cases}$$



Damit erhalten wir nun die ω-Limesmenge „$\omega(u)$" von $u \in X$:

$$\omega(u) = \omega\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } u_1, u_2 \in]-1,1[\\ \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } u_1 \in]-1,1[,\ u_2 = 1 \text{ oder } u_1 = 1,\ u_2 \in]-1,1[\\ \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } u_1 \in]-1,1[,\ u_2 = -1 \text{ oder } u_1 = -1,\ u_2 \in]-1,1[\\ \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } u_1 = 1,\ u_2 = -1 \text{ oder } u_1 = -1,\ u_2 = 1 \\ \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } u_1 = u_2 = 1 \\ \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } u_1 = u_2 = -1 \end{cases}$$

Fixpunkt

2-periodischer orbit

Hinweis: Beachte hierbei, dass $\omega(u)$ entweder ein Fixpunkt oder ein 2-periodischer Orbit ist!

Aufgabe 9:

Gegeben: • $N \in \mathbb{N}$

$[N] := \{0, 1, \dots, N-1\}$ Menge der Symbole

$S_N := [N]^{\mathbb{Z}} := \{u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid u_i \in \{0, \dots, N-1\} = [N]\}$

Menge binnendlicher Folgen mit Symbolen ($\hat{=}$ Folgengliedern) aus $[N]$

$d(u,v) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|}$ Metrik auf S_N

$(\varphi(u))_i := u_{i+1} \quad \forall u \in S_N \quad i \in \mathbb{Z}$ Verschiebeoperator (Shift)

Aufgabe: (i) : $\exists u \in S_N : \omega(u) = S_N$

(ii) : Bestimme alle

- Fixpunkte
- periodischen Orbits

von $(S_N, \mathbb{Z}, \{\varphi^n\}_{n \in \mathbb{Z}})$. Sind diese

- stabil
- anziehend ?

Lösung: zu (i): zz: $\exists u \in S_N : \omega(u) = S_N$

(d.h. $\exists u \in S_N \ \forall v \in S_N \ \exists n_k \in \underset{\mathbb{N}}{\overset{\mathbb{Z}}{\cup}}$ mit $n_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$: $\underbrace{\varphi^{n_k}(u) \xrightarrow{k \to \infty} v}$)

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n_k \geq M$:
$d(\varphi^{n_k}(u), v) \leq \varepsilon$

Wir zeigen die Aussage in 2 Schritten:

1. Konstruktion von u (diese ist nicht eindeutig!)
2. $\omega(u) = S_N$

zu 1.: Betrachte das n-fache ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$) Kartesische Produkt von $[N]$

$$X^n := [N]^n := \underbrace{[N] \times \dots \times [N]}_{n\text{-mal}}$$

mit

$$\# X^n = \underbrace{N \cdot \dots \cdot N}_{n\text{-mal}} = N^n \quad (\# \hat{=} \text{ Anzahl der Elemente})$$

Weiter sei

$$\alpha_n : \{0, \dots, N^n - 1\} \to X^n \text{ eine Abzählung}$$

(d.h. insbesondere eine Bijektion) und

$$\beta_n := \sum_{j=1}^{n-1} j N^j$$

Setze nun

$$u_{\beta_n + k \cdot n + i} := (\alpha_n(k))_{i+1} \quad , \quad k = 0, \dots, N^n - 1$$
$$i = 0, \dots, n-1$$
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_j := u_{-j} \qquad , \ j < 0$$

Dann gilt offensichtlich $u \in S_N$.

<u>Beispiel:</u> $(N=2)$

$$[N] = \{0,1\}$$

$$X^n = \bigtimes_{i=1}^{n} \{0,1\} = \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n\text{-mal}}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

$\alpha_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$

z.B. definiert durch $\alpha_1(0) := 0$

$\alpha_2(1) := 1$

$\alpha_2 : \{0,1,2,3\} \to (\{0,1\} \times \{0,1\})$

z.B. definiert durch $\alpha_2(0) := \binom{0}{0}$

$\alpha_2(1) := \binom{1}{0}$

$\alpha_2(2) := \binom{0}{1}$

$\alpha_2(3) := \binom{1}{1}$

$\alpha_3 : \{0,1,\ldots,7\} \to (\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\})$

z.B. definiert durch

$\alpha_3(0) := \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \alpha_3(4) := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\alpha_3(1) := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \alpha_3(5) := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha_3(2) := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \alpha_3(6) := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\alpha_3(3) := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \alpha_3(7) := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

u.s.w.

$$\beta_1 = \sum_{j=1}^{0} j 2^j = 0$$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} j 2^j = 2$$

$$\beta_3 = \sum_{j=1}^{2} j 2^j = 2 + 2 \cdot 2^2 = 10$$

u.s.w. Dann ist $u \in S_2$ gegeben durch

$$u = \ldots, \underset{\substack{\downarrow\\u_0}}{(0)}, \underset{\substack{\downarrow\\u_1}}{(1)}, (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), \ldots$$

zu 2.: Sei $v \in S_N$ beliebig. Wähle die Zeiten $n_K \in \mathbb{N}$ $(K \in \mathbb{N})$ derart, dass

$$u_{i+n_K} = v_i \quad \forall |i| \leq K$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle

$$M_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln\left(\frac{3(N-1)}{\varepsilon}\right) \right\rceil \in \mathbb{N}$$

Nun führe bezüglich u n_{M_ε}-Shifts durch, bis schlussendlich

$$u_{i+n_{M_\varepsilon}} = v_i \quad \forall |i| \leq M_\varepsilon$$

gilt. Dann erhalten wir für alle $n_K \geq n_{M_\varepsilon}$ (d.h. $K \geq M_\varepsilon$)

$$d(\varphi^{n_K}(u), v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{|u_{i+n_K} - v_i|}_{=0 \ \forall |i| \leq M_\varepsilon \ (\leq K)} \cdot 3^{-|i|}$$

$$= \sum_{|i|=M_\varepsilon}^{\infty} \underbrace{|u_{i+n_K} - v_i|}_{\leq N-1} \cdot 3^{-|i|} \leq (N-1) \cdot \sum_{|i|=M_\varepsilon}^{\infty} 3^{-|i|}$$

nach Wahl von M_ε

da $v \in S_N$ beliebig

$$= 2(N-1) \sum_{i=M_\varepsilon}^{\infty} 3^{-i} = (N-1) \cdot 3^{-M_\varepsilon+1} \leq \varepsilon \implies \omega(u) = S_N$$

zu (ii):

- **Fixpunkte:** Sei $u \in S_N$ beliebig. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& u \text{ Fixpunkt von } \varphi \\
:\Longleftrightarrow\ & \varphi(u) = u \\
\Longleftrightarrow\ & u_i = u_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\
\Longleftrightarrow\ & u \equiv 0, \dots, u \equiv N-1
\end{aligned}
$$

Damit gibt es in S_N bezüglich φ genau N Fixpunkte. Die Fixpunkte entsprechen genau den Konstanten biunendlichen Folgen.

- **Periodische Orbits:** Sei $u \in S_N$ beliebig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \varphi^n(u) \text{ ist ein } M\text{-periodischer Orbit } (M \in \mathbb{N}, M \geq 2) \\
:\Longleftrightarrow\ & ①: \varphi^M(u) = u \quad (\Rightarrow \varphi^{n+M}(u) = \varphi^n(\varphi^M(u)) = \varphi^n(u)\ \forall n \in \mathbb{Z}) \\
& \text{und } ②: \forall M^* \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < M^* < M: \varphi^{M^*}(u) \neq u \\
& (\text{Minimalität der Periode, schließt auch Fixpunkte aus}) \\
\Longleftrightarrow\ & ①: u_i = u_{i+M} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\
& \text{und } ②: \forall M^* \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < M^* < M\ \exists i \in \mathbb{Z}: u_i \neq u_{i+M^*}
\end{aligned}
$$

- **Stabilität & Anziehung:** Wegen Aufgabenteil (i) sind alle Fixpunkte und periodischen Orbits instabil (ansonsten erhielten wir einen Widerspruch zu $\omega(u) = S_N$) und somit insbesondere nicht anziehend.

Aufgabe 10:

Gegeben:
- $X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y,z \geq 0 \text{ und } x+y+z=1 \right\}$ (Seitenfläche des 3-Simplex / Einheitssimplex)
- Zeitdiskretes dynamisches System

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

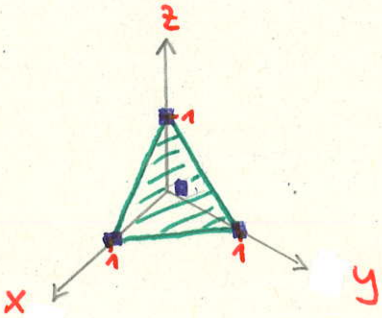
mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 + 2xy \\ y^2 + 2yz \\ z^2 + 2xz \end{pmatrix}$$

(Stein-Ulam Spiral map, Kurz: SUS map)

Aufgabe:
(a) Zeige, dass f eine Selbstabbildung auf X ist.
(b) Bestimme alle Fixpunkte von f
(c) Geben Sie eine Vermutung an, wie die ω-Limesmenge $\omega(u)$ für „charakteristische" $u \in X$ aussieht.

Motivation:



■ : Fixpunkte von f in X (4 Stück)
/// : X

Lösung:

zu (a): zz: $f: X \to X$, d.h. $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X : f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X$

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X$ beliebig, dann gilt per Definition von X

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{und} \quad x+y+z=1 \qquad (\circledast)$$

Aus der Definition von f erhalten wir

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy \\ y^2 + 2yz \\ z^2 + 2xz \end{pmatrix} \overset{\text{zz.}}{\in} X$$

Hierbei gilt

$$x^2 + 2xy = \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x}_{\geq 0}}_{\geq 0 \cdot 0 = 0} + \underbrace{2 \cdot \underbrace{\underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y}_{\geq 0}}_{\geq 0 \cdot 0 = 0}}_{\geq 2 \cdot 0 = 0}}_{\geq 0 + 0 = 0} \geq 0 \quad (\text{wegen } \circledast)$$

$$y^2 + 2yz = \underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y}_{\geq 0}}_{\geq 0 \cdot 0 = 0} + \underbrace{2 \cdot \underbrace{\underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z}_{\geq 0}}_{\geq 0 \cdot 0 = 0}}_{\geq 2 \cdot 0 = 0}}_{\geq 0 + 0 = 0} \geq 0 \quad (\text{wegen } \circledast)$$

$$z^2 + 2xz = \underbrace{\underbrace{\underbrace{z}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z}_{\geq 0}}_{\geq 0 \cdot 0 = 0} + \underbrace{2 \cdot \underbrace{\underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z}_{\geq 0}}_{\geq 0 \cdot 0 = 0}}_{\geq 2 \cdot 0 = 0}}_{\geq 0 + 0 = 0} \geq 0 \quad (\text{wegen } \circledast)$$

$$x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2xz$$
$$= (x+y+z)^2$$
$$= 1^2 \qquad \text{(wegen ⊛)}$$
$$= 1$$

Damit gilt $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X$. Da $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X$ beliebig gewählt wurde, folgt, dass f eine Selbstabbildung von X ist.

Zu (b): Bestimme $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X$ mit $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \underset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix}x^2+2xy\\y^2+2yz\\z^2+2xz\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Dies muss erfüllt sein, damit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X$ ein Fixpunkt von f ist.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x^2+(2y-1)x\\y^2+(2z-1)y\\z^2+(2x-1)z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Erinnerung: Die (zwei) Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$\alpha^2+p\alpha+q=0$$

sind durch

$$\alpha_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

gegeben

1. $$x_{1,2} = -\frac{2y-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2y-1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{-(2y-1) \pm (2y-1)}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -(2y-1)$$

2. $$y_{1,2} = -\frac{2z-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2z-1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{-(2z-1) \pm (2z-1)}{2}$$
$$\Rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = -(2z-1)$$

3. $$z_{1,2} = -\frac{2x-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{-(2x-1) \pm (2x-1)}{2}$$
$$\Rightarrow z_1 = 0, \quad z_2 = -(2x-1)$$

Daraus erhalten wir die folgenden 8 Fixpunkte von f

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \notin X$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} \in X$$

denn aus den insgesamt 8 Kombinationen ($2 \cdot 2 \cdot 2$ Kombinationen) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X$$

$$\begin{pmatrix} -(2y-1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in X$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -(2z-1) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in X$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(2x-1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in X$$

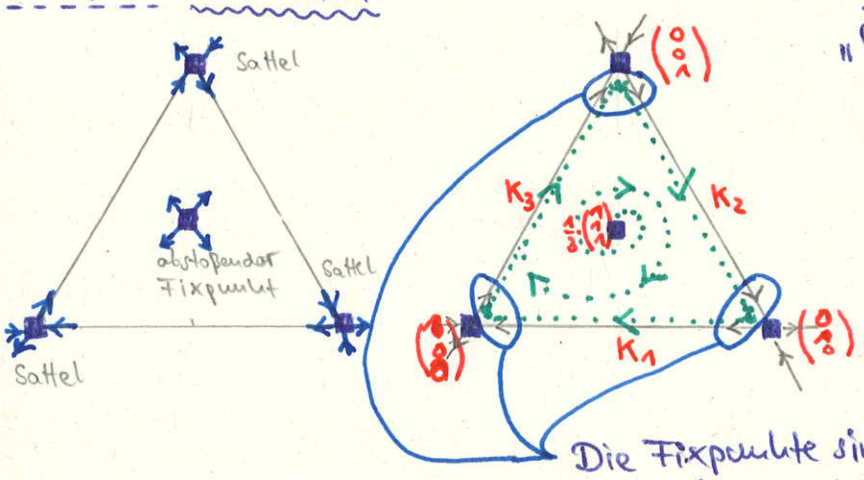
$$\begin{pmatrix} -(2y-1) \\ -(2z-1) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X$$

$$\begin{pmatrix} -(2y-1) \\ 0 \\ -(2x-1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin X$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -(2z-1) \\ -(2x-1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin X$$

$$\begin{pmatrix} -(2y-1) \\ -(2z-1) \\ -(2x-1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in X$$

Zu (c): Motivation:



Für Interessierte: Siehe „Omega-Limit Sets for the Stein-Ulam Spiral Map"
Krzysztof Barański
Michał Misiurewicz

■ : Fixpunkte
··· : diskrete Trajektorie

Die Fixpunkte sind nur ganz leicht/schwach anziehend und aufgrund eines Sattels sind alle schlussendlich wieder abstoßend. Die Iterationsfolge kommt dem Rand beliebig nahe!

Lösung: Für die vier Fixpunkte gilt

$$\omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \ \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \ \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \ \omega\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}\right\}$$

Für die Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X \setminus \left(\partial X \cup \left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}\right\}\right)$ gilt, dass die Iterationsfolge dem Rand ∂X beliebig nahe kommt. Deshalb gilt für diese Punkte

$$\omega\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \subseteq \partial X \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X \setminus \left(\partial X \cup \left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Genauere Aussagen lassen sich hier nicht treffen. Für Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \partial X \setminus \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ werden wir numerische Untersuchungen durchführen. Die Ergebnisse zeigen unter Verwendung von

$$\partial X = K_1 \dot\cup K_2 \dot\cup K_3 \cup \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

mit

$$K_1 := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X \;\middle|\; \exists \lambda \in]0,1[: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (\lambda-1)\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\}$$

$$K_2 := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X \;\middle|\; \exists \lambda \in]0,1[: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - (\lambda-1)\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\}$$

$$K_3 := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in X \;\middle|\; \exists \lambda \in]0,1[: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (\lambda-1)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\}$$

dass die ω-Limesmengen durch

$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} & \text{, falls } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in K_1 \\ \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} & \text{, falls } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in K_2 \\ \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} & \text{, falls } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in K_3 \end{cases}$$

Desweiteren „vermute" ich, dass der Rand ∂X invariant ist.

Die Matlab-Files zu den Simulationen findet ihr auf der Übungsseite.