Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 4
6.5.2011

Abgabe: Freitag, 13.5.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 11: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) \cdot \cos(4u_2) \\ \cos(u_2^3) \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie ein Programm, das in $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ alle Gleichgewichte der obigen Differentialgleichung einzeichnet. Hierbei sind anziehende Gleichgewichte in grün und nicht-anziehende Gleichgewichte in rot zu markieren.

(6 Punkte)

Aufgabe 12: Ein Modell einer Futterkette mit drei Spezies u_1, u_2, u_3 (u_3 frisst u_2, u_2 frisst u_1, u_1 wächst ständig nach) wird durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1), \\ \dot{u}_2 &= -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2), \\ \dot{u}_3 &= -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2) \end{aligned}$$

mit

$$f_i(v) = \frac{v}{a_i + b_i v}, \; i = 1, 2 \text{ und positiven Parametern } \alpha, a_1, b_1, a_2, b_2$$

beschrieben.

- Zeigen Sie, dass die Hyperebene

$$H = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 + u_3 = 1 \right\}$$

  asymptotisch stabil ist. Wie verhält sich das Vektorfeld auf dem Rand des Dreiecks $D = H \cap \mathbb{R}^3_+$?

- Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von α – alle Fixpunkte des zugehörigen dynamischen Systems im $\mathbb{R}^3_+$.

- Diskutieren Sie – in Abhängigkeit von α – (asymptotische) Stabilität des Fixpunktes $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0)$ (es überlebt nur Spezies 1).

(6 Punkte)

Aufgabe 13: Die folgenden Aussagen liefen eine Erweiterung von Satz 6.1.

(a) Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$. Beweisen Sie die Implikation (i)$\Rightarrow$(ii) für die folgenden Aussagen.

(i) Es existiert eine symmetrische und positiv definite Matrix $H \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $\alpha > 0$ mit

$$\langle u, Au\rangle_H \leq -\alpha \langle u, u\rangle_2$$

für alle $u \in \mathbb{R}^m$.
Hier bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das euklidische innere Produkt und

$$\langle u, v\rangle_H := \langle u, Hv\rangle_2.$$

(ii) $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

(b) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, auf die die Aussage (ii) zutrifft, nicht aber die Aussage (i) für $H = \mathrm{Id}_2$.

Hinweise:

(i)$\Rightarrow$(ii): Verwenden Sie Satz 6.1 und weisen Sie asymptotische Stabilität unter Verwendung des Gronwall-Lemmas (vgl. Numerik II, Aufgabe 6) nach. Diskutieren Sie hierzu $\varphi^t(u) = e^{tA}u$ in der Norm

$$\|u\|_H := \sqrt{\langle u, u\rangle_H}.$$

zu (b): Man wähle A so, dass $A + A^T$ einen positiven Eigenwert besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 14:** Zeigen Sie (unter der zusätzlichen Annahme $\lambda \in \mathbb{R}$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$), dass in Aufgabe 13(a) auch die Rückrichtung (i)$\Leftarrow$(ii) gilt.

Hinweis:

(i)$\Leftarrow$(ii): Man betrachte zunächst obere Dreiecksmatrizen $A \in \mathbb{C}^{m,m}$ ($A_{ij} = 0$ für $i > j$, $\mathrm{Re}(A_{ii}) < 0\ \forall i = 1, \ldots, m$) und suche eine geeignete Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}^{m,m}$ und ein $\beta > 0$ mit

$$\mathrm{Re}(\bar{u}^T D^{-1} A D u) \leq -\beta \|u\|_2^2 \qquad \forall u \in \mathbb{C}^m.$$

Dann verwende man $H = QD^{-2}\bar{Q}^T$, wobei Q die Transformationsmatrix auf die Schursche-Normalform (vgl. Numerik I) bezeichnet. Reduzieren Sie so den allgemeinen Fall auf den Fall oberer Dreiecksmatrizen.

(6 Bonuspunkte)

Aufgabe 11:

Gegeben:

$$u'(t) = \begin{pmatrix} \sin(2u_1(t)) \cdot \cos(4u_2(t)) \\ \cos(u_2^3(t)) \end{pmatrix} \quad , t \geq 0 \, , \; u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$$

Aufgabe: Schreiben Sie ein Programm, das in $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ alle Gleichgewichte der obigen Differentialgleichung einzeichnet. Hierbei sind anziehende Gleichgewichte in grün und nicht-anziehende Gleichgewichte in rot zu markieren.

Lösung: Aus Übungsgründen berechnen wir die Gleichgewichte und deren Anziehungseigenschaft zunächst analytisch:

Gleichgewichte:

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ ist ein Gleichgewicht der obigen DGL} :\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) \cdot \cos(4u_2) \\ \cos(u_2^3) \end{pmatrix}$$

- zu u_2:

$$\begin{aligned} \cos(u_2^3) = 0 \; &\overset{y := u_2^3}{\Longleftrightarrow} \; \cos(y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \; y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \; u_2^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \; u_2 \in \Big\{ \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+2k)^{\frac{1}{3}} \; \in \mathbb{R}, \, k \geq 0 \, , \\ &\qquad \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+2k)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right), \; \in \mathbb{R}, \, k < 0 \\ &\qquad \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+2k)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) \Big\} \; \notin i\mathbb{R} \; \forall k \, , \; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

~~Hierbei sind die letzten beiden Nullstellen für alle $k \in \mathbb{Z}$ komplex und daher für uns nicht interessant (da wir reelle Gleichgewichte suchen)~~. Die erste Nullstelle ist für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ ebenfalls komplex. Da wir uns für reelle Nullstellen $u_2 \in [0, 2\pi]$ interessieren, darf k maximal den Wert 78 annehmen, d.h.

$$\boxed{u_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+2k)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \text{ mit } 0 \leq k \leq 78}$$

- zu u_1:

$$\sin(2u_1) \cdot \cos(4u_2) = 0 \Longleftrightarrow \left(\sin(2u_1) = 0 \text{ oder } \cos(4u_2) = 0 \right)$$

Da $\cos(4u_2) \neq 0$ für $u_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+2k)^{\frac{1}{3}}$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq 78$, genügt es zu untersuchen, wann $\sin(2u_1) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(2u_1) = 0 \; &\Longleftrightarrow \; 2u_1 = j\pi \quad , j \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \; u_1 = \frac{j\pi}{2} \quad , j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

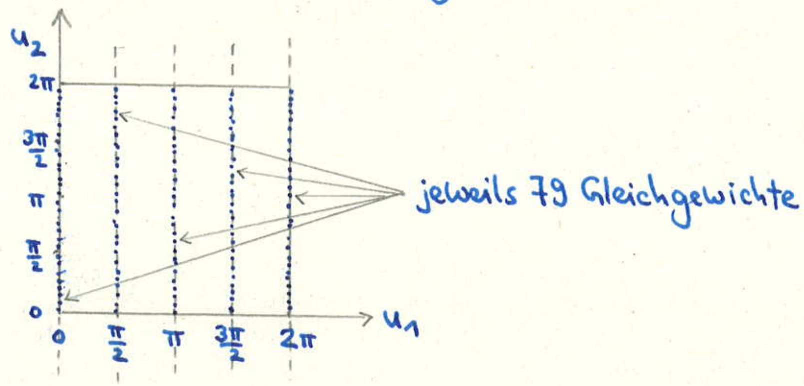
Da wir uns für Nullstellen $u_1 \in [0, 2\pi]$ interessieren, darf j maximal den Wert 4 annehmen und den Wert $j=0$ nicht unterschreiten:

$$\boxed{u_1 = \frac{j\pi}{2} \quad , \quad j \in \mathbb{Z} \text{ mit } 0 \leq j \leq 4}$$

Damit sind alle möglichen Gleichgewichte der obigen DGL in $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ durch 2

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \frac{j\pi}{2} \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+2k)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, \quad j,k \in \mathbb{Z} \text{ mit } \begin{matrix} 0 \leq j \leq 4 \\ 0 \leq k \leq 78 \end{matrix}}$$

gegeben (d.h. $5 \cdot 79 = 395$ Gleichgewichte).



Anziehung:

Wir verwenden den Satz von Lyapunov (Vorlesung: Satz 6.3), der besagt

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ ist asymptotisch stabil} \Leftarrow \forall \lambda \in \sigma\left(Df\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right): \operatorname{Re}\lambda < 0$$

$$\text{" \quad " \quad " \quad instabil} \Leftarrow \exists \lambda \in \sigma\left(Df\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right): \operatorname{Re}\lambda > 0$$

Da ein asymptotisch stabiler Fixpunkt stabil und anziehend ist, folgt daraus die Anziehungseigenschaft.

Daher berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix $Df\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$:

$$Df\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\overbrace{\cos(2u_1)}^{\pm 1}\cdot\overbrace{\cos(4\cdot u_2)}^{\neq 0} & -4\cdot\overbrace{\sin(2u_1)}^{=0}\cdot\overbrace{\sin(4u_2)}^{\text{egal}} \\ 0 & -\underbrace{\sin(u_2^3)}_{\pm 1}\cdot 3\cdot\underbrace{u_2^2}_{\geq 0} \end{pmatrix}$$

Hierbei gilt:

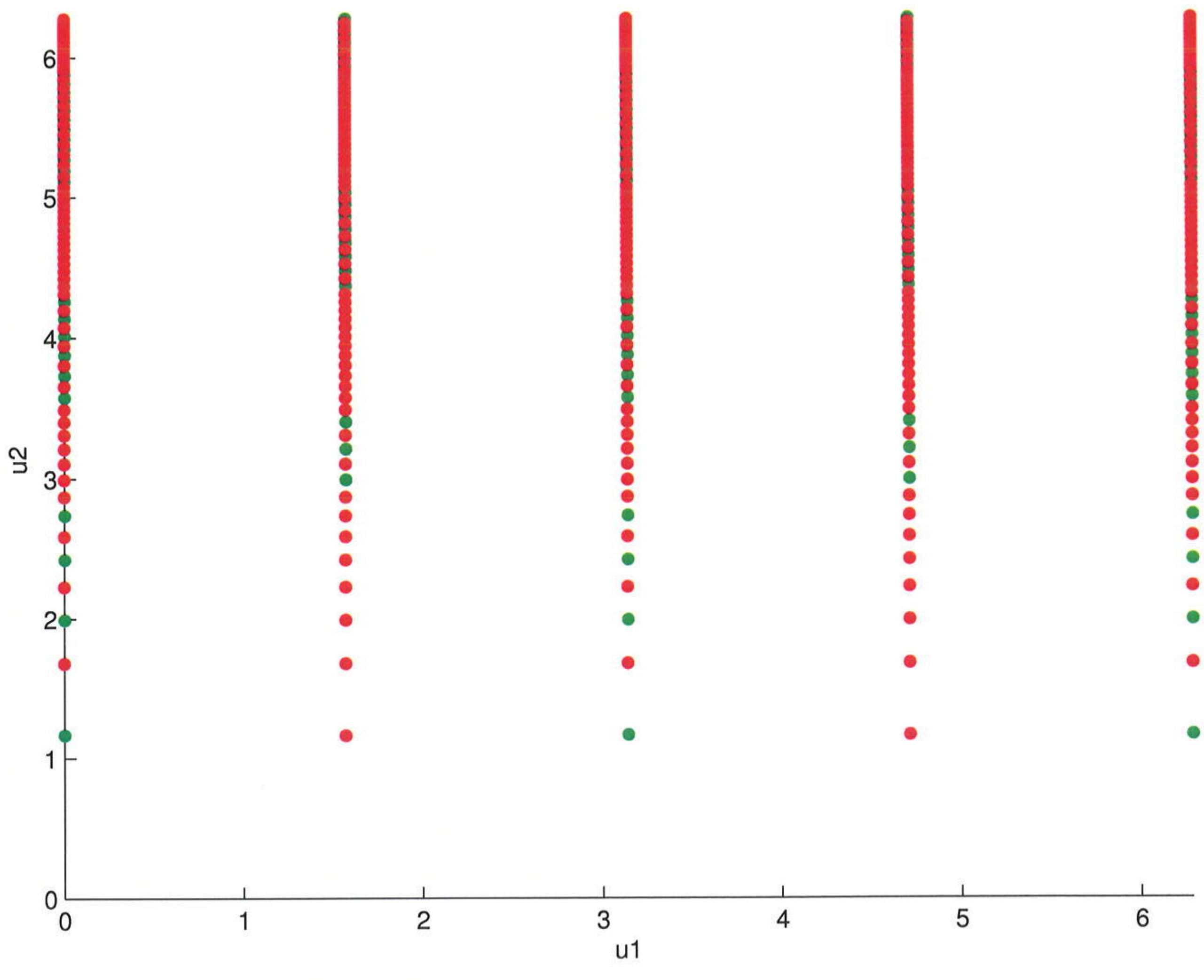
- $$\cos(2u_1) = \begin{cases} 1 & , j \text{ gerade} \\ -1 & , j \text{ ungerade} \end{cases} = (-1)^j$$

- $$\sin(u_2^3) = \begin{cases} 1 & , k \text{ gerade} \\ -1 & , k \text{ ungerade} \end{cases} = (-1)^k$$

Da wir jedoch über das Vorzeichen von $\cos(4\cdot u_2)$ keine allgemeine Aussage treffen können, müssen wir die asymptotische Stabilität numerisch zeigen.

```
function equilibrium=aufgabe11b
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here

    h=waitbar(0,'Suche nach Gleichgewichten...');

    figure;
    axis([0,2*pi,0,2*pi]);
    hold on;

    u1=linspace(0,2*pi,300);     % Unterteilung fuer u1
    u2=linspace(0,2*pi,300);     % Unterteilung fuer u2
    eps=10^(-4);                % Fehlergenauigkeit des Newton-Verfahrens
    maxiter=20;                  % Maximale Anzahl an Iterationen des Newton
                                 % Verfahrens
    anz=0;                       % Anzahl an Gleichgewichten

    for j=1:length(u1);
        for k=1:length(u2);
            % 1. Newton-Verfahren anwenden
            u=newton([u1(j);u2(k)],eps,maxiter);
            % 2. Ueberpruefe, ob die Loesung ausserhalb von [0,2pi]^2 liegt
            if(u(1)<0 || u(1)>2*pi || u(2)<0 || u(2)>2*pi)
                continue;
            end
            % 3. Test, ob die Nullstelle bereits zuvor gefunden wurde
            found = 0;
            for i=1:anz
                if norm(equilibrium(:,i)-u) < eps
                    found = 1;
                    continue;
                end
            end
            if found==1
                continue;
            end
            % 5. Eigenwerte von DF(u1,u2): Da DF(u1,u2) eine rechte obere
            %                             Dreiecksmatrix ist, liegen die
            %                             Eigenwerte auf der Diagonalen.
            eigval1=2*cos(2*u(1))*cos(4*u(2));
            eigval2=-3*u(2)^2*sin(u(2)^3);
            % 6. Attraktivitaet (bzw. asypt. Stabilitaet): Asym. stabil,
            %                             falls die Realteile aller Eigen-
            %                             werte von DF(u1,u2) negativ sind
            if(eigval1<0 && eigval2<0)
                plot(u(1),u(2),'go','LineWidth',2,...
                                'MarkerEdgeColor','g',...
                                'MarkerFaceColor','g',...
                                'MarkerSize',3);
            else
                plot(u(1),u(2),'ro','LineWidth',2,...
                                'MarkerEdgeColor','r',...
                                'MarkerFaceColor','r',...
                                'MarkerSize',3);
            end
            % 7. Nullstelle
```

```
            if norm([sin(2*u(1))*cos(4*u(2));cos(u(2)^3)])<eps
                anz=anz+1;
                disp(['Aktuelle Anzahl gefundener Gleichgewichte:', num2str
(anz)]);
                equilibrium(:,anz)=u(:);
            end
            waitbar((j*length(u1)+k)/(length(u1)*length(u2)),h);
        end
    end

    close(h);
    disp(['Anzahl der gefundenen Gleichgewichte: ', num2str(anz)])

    function u=newton(u0,eps,maxiter)
        %maxiter=20;    % Maximale Anzahl an Iterationen
        %eps=10^(-16);  % Fehlergenauigkeit
        iter=0;
        u=u0;
        un=u0;
        un(1)=un(1)-1;
        while(norm(u-un)>eps && iter<maxiter)
            iter=iter+1;
            un=u;
            u=un-[2*cos(2*un(1))*cos(4*un(2)),-4*sin(2*un(1))*sin(4*un(2));...
                0,-3*un(2)^2*sin(un(2)^3)]\[sin(2*un(1))*cos(4*un(2));cos(un(2)
^3)];
        end
    end
end
```



u2
u1
0
1
2
3
4
5
6

Aufgabe 12:

Gegeben:

$$\dot u_1 = \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1)$$
$$\dot u_2 = -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2)$$
$$\dot u_3 = -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2)$$

mit $0 < \alpha, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ und

$$f_i(v) = \frac{v}{a_i + b_i v}, \quad i = 1,2$$

Aufgabe:
① : $H := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 + u_2 + u_3 = 1\}$ ist asymptotisch stabil.
② : Analysiere das Verhalten des Vektorfeldes auf dem Rand des Dreiecks $D = H \cap \mathbb{R}^3_+$
③ : Bestimme (in Abhängigkeit von α) alle Fixpunkte des Systems im $\mathbb{R}^3_+$.
④ : Untersuchen Sie den Fixpunkt $(u_1, u_2, u_3)^T = (1,0,0)^T$ (in Abhängigkeit von α) hinsichtlich seiner asymptotischen Stabilität

Lösung:

zu ①: Betrachte die Transformation

$$x = u_1 + u_2 + u_3$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot x &= \dot u_1 + \dot u_2 + \dot u_3 \\ &= \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1) - \alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2) - \alpha u_3 + u_3 f_2(u_2) \\ &= \alpha - \alpha(u_1 + u_2 + u_3) \\ &= \alpha - \alpha x \\ &= \alpha(1-x) =: g_\alpha(x)\end{aligned}$$

Offenbar ist $\bar x = 1$ (unabhängig von der Wahl von α) ein Fixpunkt von $\dot x = g_\alpha(x)$. Ⓐ Da $Dg_\alpha(x) = -\alpha \underset{\alpha>0}{<} 0$ gilt, ist der einzige Eigenwert aus dem Spektrum $\sigma(Dg_\alpha(x))$ durch $\lambda = -\alpha < 0$ gegeben. Da $\operatorname{Re}\lambda < 0$ gilt, ist $\bar x = 1$ nach Satz 6.3 (Lyapunov) asymptotisch stabil, d.h.

$$\varphi^t(x_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar x = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Damit ist insbesondere die Hyperebene H asymptotisch stabil (denn $\bar x = 1 = u_1 + u_2 + u_3$).

zu ②: Betrachte das Dreieck

$$D := H \cap \mathbb{R}^3_+ = \{u \in \mathbb{R}^3_+ \mid u_1 + u_2 + u_3 = 1\}$$

Wir zeigen, dass $\mathbb{R}^3_+$ (positiv) invariant ist. Da der Schnitt zweier (positiv) invarianten Mengen wieder (positiv) invariant ist, folgt daraus, dass $D = H \cap \mathbb{R}^3_+$ (positiv) invariant ist. Nach der Subtangentialbedingung (Satz 4.2) ist $\mathbb{R}^3_+$ genau positiv invariant, wenn

$$\liminf_{h\to 0} \operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix} u_1 + h(\alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1)) \\ u_2 + h(-\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2)) \\ u_3 + h(-\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2)) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3_+\right) = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{R}^3_+$$

wobei $\partial\mathbb{R}^3_+ = \left\{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_+ \,\middle|\, \exists i \in \{1,2,3\} : u_i = 0\right\}$. Hierbei gilt: Falls $u_1 = 0 \Rightarrow$ erste Komponente $= h\alpha > 0$, falls $u_2 = 0 \Rightarrow$ zweite Komponente $= 0$, falls $u_3 = 0 \Rightarrow$ dritte Komponente $= 0$. Damit ist der Kegel $\mathbb{R}^3_+$ und somit auch das Dreieck $D = H \cap \mathbb{R}^3_+$ positiv invariant.

Ⓐ : Damit folgt, dass die Hyperebene H (positiv) invariant ist.

zu (3): Die Fixpunkte in $\mathbb{R}^3_+$ des obigen Systems sind Punkte $(u_1,u_2,u_3)^T$, $u_i\in\mathbb{R}_+$ mit

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1)\\ -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2)\\ -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2)\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{I}\\ \text{II}\\ \text{III}\end{matrix}$$

Aus III folgt

$$0 \overset{!}{=} -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2) = (f_2(u_2)-\alpha)\cdot u_3$$

$$\Rightarrow u_3 = 0 \quad \text{oder} \quad f_2(u_2) = \alpha$$

1. Fall: $(u_3=0)$

Aus II erhalten wir

$$0 \overset{!}{=} -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - \underbrace{u_3}_{=0}\cdot f_2(u_2) = (f_1(u_1)-\alpha)\cdot u_2$$

$$\Rightarrow u_2 = 0 \quad \text{oder} \quad f_1(u_1) = \alpha$$

1. Unterfall: $(u_2 = 0)$

Aus I erhalten wir

$$0 \overset{!}{=} \alpha - \alpha u_1 - \underbrace{u_2}_{=0} f_1(u_1) = \alpha(1-u_1)$$

$$\underset{\alpha>0}{\Rightarrow} u_1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3_+$$

2. Unterfall: $(f_1(u_1) = \alpha)$

Aus dieser Bedingung erhalten wir

$$\alpha = f_1(u_1) = \frac{u_1}{a_1+b_1u_1} \Leftrightarrow \alpha a_1 + \alpha b_1 u_1 = u_1$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha b_1)u_1 = \alpha a_1$$

$$\underset{\alpha\neq\frac{1}{b_1}}{\Leftrightarrow} u_1 = \frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1} \quad , \alpha \neq \frac{1}{b_1}$$

Nun betrachten wir I und erhalten

$$0 \overset{!}{=} \alpha - \alpha u_1 - u_2 \underbrace{f_1(u_1)}_{=\alpha} = \alpha(1-u_1-u_2)$$

$$\Rightarrow 0 = 1 - u_1 - u_2$$

$$\Rightarrow u_2 = 1 - u_1 = 1 - \frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1}\\ 1-\frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1}\\ 0\end{pmatrix}, \alpha \neq \frac{1}{b_1}} \quad \begin{matrix}\in \mathbb{R}^3_+ \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{b_1} \text{ und } \alpha \leq \frac{1}{a_1+b_1}\\ \notin \mathbb{R}^3_+ \Leftrightarrow \text{sonst}\end{matrix}$$

denn:

$$\frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha b_1} > 0 \Leftrightarrow 1-\alpha b_1 > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha b_1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{b_1}$$

$$1 - \frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{\alpha a_1}{1-\alpha b_1} \underset{\alpha<\frac{1}{b_1}}{\overset{>0}{\Leftrightarrow}} 1 - \alpha b_1 \geq \alpha a_1 \Leftrightarrow 1 \geq \alpha(a_1+b_1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{a_1+b_1}$$

2. Fall: $(f_2(u_2) = \alpha)$

Aus dieser Bedingung erhalten wir

$$\alpha = f_2(u_2) = \frac{u_2}{a_2 + b_2 u_2} \iff \alpha a_2 + \alpha b_2 u_2 = u_2$$
$$\iff (1 - \alpha b_2) u_2 = \alpha a_2$$
$$\underset{\alpha \neq \frac{1}{b_2}}{\iff} u_2 = \frac{\alpha a_2}{1 - \alpha b_2} \quad , \ \alpha \neq \frac{1}{b_2}$$

Um $u_2 > 0$ zu garantieren muss analog zum 2. Unterfall $\alpha < \frac{1}{b_2}$ gelten.
Nun betrachten wir (I) und erhalten

$$0 \overset{!}{=} -\alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1) = -\alpha - \alpha u_1 - u_2 \cdot \frac{u_1}{a_1 + b_1 u_1}$$
$$= -\alpha - \alpha u_1 - \frac{\alpha a_2}{1 - \alpha b_2} \cdot \frac{u_1}{a_1 + b_1 u_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha a_2}{1 - \alpha b_2} \cdot \frac{u_1}{a_1 + b_1 u_1} = -\alpha - \alpha u_1$$

$$\Rightarrow \alpha a_2 u_1 = (-\alpha - \alpha u_1) \cdot (1 - \alpha b_2) \cdot (a_1 + b_1 u_1)$$
$$= -\alpha a_1 - \alpha b_1 u_1 + \alpha^2 b_2 a_1 + \alpha^2 b_2 b_1 u_1 - \alpha a_1 u_1 - \alpha b_1 u_1^2$$
$$+ \alpha^2 b_2 a_1 u_1 + \alpha^2 b_2 b_1 u_1^2$$

$$\Rightarrow 0 = (\alpha^2 b_2 b_1 - \alpha b_1) u_1^2 + (\alpha^2 b_2 b_1 - \alpha a_1 - \alpha b_1 - \alpha a_2 + \alpha^2 b_2 a_1) u_1$$
$$+ (\alpha^2 b_2 a_1 - \alpha a_1)$$

$$\underset{:\alpha}{\Rightarrow} 0 = (\alpha b_2 b_1 - b_1) u_1^2 + (\alpha b_2 b_1 - a_1 - b_1 - a_2 + \alpha b_2 a_1) u_1 + (\alpha b_2 a_1 - a_1)$$

$$\underset{\alpha \neq \frac{1}{b_2}}{\Rightarrow} 0 = u_1^2 + \underbrace{\frac{(\alpha b_2 b_1 - a_1 - b_1 - a_2 + \alpha b_2 a_1)}{(\alpha b_2 b_1 - b_1)}}_{=:p} \cdot u_1 + \underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{=:q}$$

$$\Rightarrow u_1^{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= -\frac{(\alpha b_2 b_1 - a_1 - b_1 - a_2 + \alpha b_2 a_1)}{2(\alpha b_2 b_1 - b_1)} \pm \sqrt{\frac{(\alpha b_2 b_1 - a_1 - b_1 - a_2 + \alpha b_2 a_1)^2}{4(\alpha b_2 b_1 - b_1)^2} - \frac{a_1}{b_1}}$$
$$= -\frac{u_2 + \alpha a_1 - \alpha b_1}{2\alpha b_1} \pm \sqrt{\left(\frac{u_2 + \alpha a_1 - \alpha b_1}{2\alpha b_1}\right)^2 + \frac{a_1}{b_1}}$$

Hierbei gilt offensichtlich $u_1^- < 0$ (Beweis bleibt dem Leser überlassen), $u_1 := u_1^+$
Aus (II) erhalten wir unter Verwendung von (I) und der Fallvoraussetzung $f_2(u_2) = \alpha$

$$0 \overset{!}{=} -\alpha u_2 + \underbrace{u_2 f_1(u_1)}_{\overset{(I)}{=} \alpha - \alpha u_1} - u_3 \underbrace{f_2(u_2)}_{= \alpha}$$
$$= \alpha(1 - u_1 - u_2 - u_3)$$
$$\underset{:\alpha,\ +u_3}{\Rightarrow} u_3 = 1 - u_1 - u_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \frac{\alpha a_2}{1 - \alpha b_2} \\ 1 - u_1^+ - \frac{\alpha a_2}{1 - \alpha b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2 \\ 1 - u_1^+ - u_2 \end{pmatrix}}$$

Ob der Fixpunkt in $\mathbb{R}_+^3$ liegt hängt davon ab, ob $u_3 \in \mathbb{R}_+$ gilt. Diese Bedingung hängt jedoch von a_1 ab. Im Falle großer Werte von a_1 liegt der Wert u_3 für jede Wahl von α außerhalb von $\mathbb{R}_+$. (Ein genaueres Nachweis bleibt dem Leser überlassen.)

zu ④: Nach Satz 6.1 genügt es, wenn wir die Eigenwerte der Matrix $Df(u)$ im Punkt $\overset{\text{ü}}{(1,0,0)^T}$ untersuchen. Die Ableitung ist gegeben durch

$$Df(u) = \begin{pmatrix} -\alpha - u_2 f_1'(u_1) & -f_1(u_1) & 0 \\ u_2 f_1'(u_1) & -\alpha + f_1(u_1) - u_3 f_2'(u_2) & -f_2(u_2) \\ 0 & u_3 f_2'(u_2) & -\alpha + f_2(u_2) \end{pmatrix}$$

Werten wir die Matrix $Df(u)$ in $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ aus

$$Df\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -f_1(1) & 0 \\ 0 & -\alpha + f_1(1) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

so erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\alpha \,, \; \lambda_2 = -\alpha \,, \; \lambda_3 = -\alpha + f_1(1) = -\alpha + \frac{1}{a_1+b_1} \,.$$

Nach Satz 6.1 gilt nun:

- $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ist asymptotisch stabil

  $\iff \operatorname{Re}\lambda < 0 \;\; \forall \lambda \in \sigma\left(Df\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

  $\iff \alpha > 0$ und $\alpha > \frac{1}{a_1+b_1} > 0$

  $\iff \alpha > \frac{1}{a_1+b_1}$

- $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ist stabil

  $\iff \operatorname{Re}\lambda \leq 0 \;\; \forall \lambda \in \sigma\left(Df\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

  und λ ist halbeinfach $\forall \lambda \in \sigma\left(Df\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$

  $\iff \alpha \geq 0$ und $\alpha \geq \frac{1}{a_1+b_1} > 0$

  $\iff \alpha \geq \frac{1}{a_1+b_1}$

Aufgabe 13 & 14:

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Zeige: ⓐ Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

① : $Re(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

② : $\exists H \in \mathbb{R}^{m,m}$ symmetrisch & positiv definit $\wedge \ \exists \alpha > 0$:

$$\langle u, Au \rangle_H \leq -\alpha \langle u, u \rangle_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

wobei

$$\langle u, v \rangle_2 := \sum_{i=1}^{m} u_i v_i \quad \text{euklidisches Skalarprodukt}$$

$$\langle u, v \rangle_H := \langle u, Hv \rangle_2$$

ⓑ : Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, für die ① gilt, jedoch die Aussage ② mit $H = I$ nicht erfüllt ist.

Lösung:

zu ⓐ: ② ⇒ ①: Betrachte die Lösung $\varphi^t(u_0) := e^{tA} u_0$ der folgenden linearen DGL mit Konstanten Koeffizienten

$$u' = Au \quad , t > 0$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m, \quad t = 0$$

Nach Satz 6.1 gilt:

$$M = \{0\} \text{ ist asymptotisch stabil} \Leftrightarrow Re\,\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Daher folgt ①, sobald wir gezeigt haben, dass $M = \{0\}$ asymptotisch stabil ist.

Erinnerung 1:

$\{0\}$ asymptotisch stabil $:\Leftrightarrow$ $\{0\}$ anziehend & $\{0\}$ stabil

$\{0\}$ anziehend $:\Leftrightarrow \exists V \supset \{0\} : \|e^{tA} u\|_H \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \quad \forall u \in V$

$\{0\}$ stabil $:\Leftrightarrow \forall U \supset \{0\} \ \exists V \supset \{0\} : e^{tA} V \subset U \quad \forall t \in \mathbb{T}, t \geq 0$

Erinnerung 2: (Differentielles Gronwall-Lemma)

$0 < T \leq \infty$, $\varphi \in C([0,T[, \mathbb{R}) \cap C^1(]0,T[, \mathbb{R})$. Falls φ eine Abschätzung der Form

$$\varphi'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t) \cdot \varphi(t) \quad \forall t \in]0,T[$$

erfüllt, wobei $\alpha, \beta \in C([0,T[, \mathbb{R})$, so gilt die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) \cdot e^{\int_0^t \beta(\tau) d\tau} + \int_0^t e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \cdot a(s) ds \quad \forall t \in [0,T[$$

Es gilt nun (beachte: die Norm $\|.\|_H$ existiert, da $H \in \mathbb{R}^{m,m}$ symmetrisch & pos. definit)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|e^{tA} u\|_H^2 &= \frac{d}{dt} \langle e^{tA} u, e^{tA} u \rangle_H \\
&= 2 \cdot \langle e^{tA} u, A e^{tA} u \rangle_H \\
&\underset{②}{\leq} -2\alpha \cdot \langle e^{tA} u, e^{tA} u \rangle_2 \\
&= -2\alpha \|e^{tA} u\|_2^2 \\
&\overset{\text{Normäquivalenz}}{\leq} -2\alpha \|H^{\frac{1}{2}}\|_2^{-2} \cdot \|e^{tA} u\|_H^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Aus dem differentiellen Gronwall-Lemma folgt nun mit

$$T := \infty$$
$$\varphi(t) := \|e^{tA}u\|_H^2 \quad , \varphi \in C([0,\infty[,\mathbb{R}) \cap C^1(]0,\infty[,\mathbb{R}) \quad \forall u \in \mathbb{R}^m \text{ fest}$$
$$\alpha(t) := 0$$
$$\beta(t) := -2\alpha \|H^{\frac{1}{2}}\|_2^{-2} \quad , \alpha, \beta \in C([0,\infty[,\mathbb{R})$$

die Ungleichung

$$\|e^{tA}u\|_H^2 \leq \underbrace{\|e^{0A}u\|_H^2}_{=\|u\|_H^2} \cdot e^{\int_0^t -2\alpha\|H^{\frac{1}{2}}\|_2^{-2} d\tau} + \underbrace{\int_0^t e^{\int_s^t -2\alpha\|H^{\frac{1}{2}}\|_2^{-2} d\tau} \cdot 0 \, ds}_{=0}$$

$$= e^{-2\alpha\|H^{\frac{1}{2}}\|_2^{-2} \cdot t} \cdot \|u\|_H^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \underline{\forall u \in \mathbb{R}^m}$$

Damit ist $\{0\}$ asymptotisch stabil. Insbesondere können die Umgebungen U und V ziemlich beliebig gewählt werden. Aus Satz 6.1 folgt die Behauptung.

Ergänzung: (Normäquivalenz)

$$\|u\|_2^2 \underset{\substack{H \text{ sym.} \\ \& \text{ pos. def.}}}{=} \|H^{-\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}u\|_2^2 \underset{\substack{\text{Matrix-Vektornorm} \\ \text{Verträglichkeit}}}{\leq} \|H^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \|H^{\frac{1}{2}}u\|_2^2$$

$$= \|H^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \langle H^{\frac{1}{2}}u, H^{\frac{1}{2}}u\rangle_2$$

$$\underset{H \text{ sym.}}{=} \|H^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \langle u, Hu\rangle_2$$

$$= \|H^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \langle u, u\rangle_H$$

$$= \|H^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \|u\|_H^2 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

$$\|u\|_H^2 = \langle u, Hu\rangle_2 = \langle u, H^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}u\rangle_2$$

$$\underset{H \text{ sym.}}{=} \langle H^{\frac{1}{2}}u, H^{\frac{1}{2}}u\rangle_2$$

$$= \|H^{\frac{1}{2}}u\|_2^2$$

$$\underset{\substack{\text{Matrix-Vektornorm} \\ \text{Verträglichkeit}}}{\leq} \|H^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \|u\|_2^2 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \|H^{\frac{1}{2}}\|_2^{-1} \cdot \|u\|_H \leq \|u\|_2 \leq \|H^{-\frac{1}{2}}\|_2 \cdot \|u\|_H \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

Kürzer: Auf dem $\mathbb{R}^m$ sind alle Normen zueinander äquivalent.

(1) $\Rightarrow$ (2): Vorbemerkung 1:

- $B \in \mathbb{C}^{m,m}$ obere Δ's-Matrix, $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & * \end{pmatrix}$
  mit $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ und $\mathrm{Re}(b_{jj}) < 0 \ \forall j = 1,\dots,m$
- $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_m) \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit $d_i > 0 \ \forall i = 1,\dots,m$

Dann gilt für $v \in \mathbb{C}^m$

$$\overline{v}^T D^{-1} B D v = \overline{v}^T \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & b_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix} v$$

$$= \overline{v}^T \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{d_2}{d_1} b_{12} & \cdots & \frac{d_m}{d_1} b_{1m} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{d_m}{d_{m-1}} b_{m-1,m} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mm} \end{pmatrix} v$$

$d_j := \varepsilon^j$ mit $0 < \varepsilon \leq 1$ (Konstruktion von D)

$$= \overline{v}^T \begin{pmatrix} b_{11} & \varepsilon^1 b_{12} & \cdots & \varepsilon^{m-1} b_{1m} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \varepsilon^1 b_{m-1,m} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mm} \end{pmatrix} v$$

$$= \overline{v}^T \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \varepsilon^{i-1} \cdot b_{1i} \cdot v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=m}^m \varepsilon^{i-m} \cdot b_{mi} \cdot v_i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^m \varepsilon^{i-1} \cdot b_{1i} \cdot v_i \cdot \overline{v_1} + \dots + \sum_{i=m}^m \varepsilon^{i-m} \cdot b_{mi} \cdot v_i \cdot \overline{v_m}$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=j}^m \varepsilon^{i-j} \cdot b_{ji} \cdot v_i \cdot \overline{v_j}$$

$$= \sum_{j=1}^m b_{jj} \cdot v_j \cdot \overline{v_j} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=j+1}^m \varepsilon^{i-j} \cdot b_{ji} \cdot v_i \cdot \overline{v_j}$$

$$= \sum_{j=1}^m b_{jj} \cdot |v_j|^2 + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=j+1}^m \varepsilon^{i-j-1} \cdot b_{ji} \cdot v_i \cdot \overline{v_j}$$

Daraus erhalten wir weiter:

$$\mathrm{Re}(\overline{v}^T D^{-1} B D v) = \sum_{j=1}^m \mathrm{Re}(b_{jj}) \cdot |v_j|^2 + \varepsilon \cdot \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=j+1}^m \varepsilon^{i-j-1} \cdot b_{ji} \cdot v_i \cdot \overline{v_j} \right)$$

$\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ & Δ's Ungl. & $\varepsilon > 0$

$$\leq -\sum_{j=1}^m \underbrace{-\mathrm{Re}(b_{jj})}_{= |\mathrm{Re}(b_{jj})| \geq \min_{j=1,\dots,m} |\mathrm{Re}(b_{jj})|} \cdot |v_j|^2 + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=j+1}^m \varepsilon^{i-j-1} |b_{ji}| \cdot |v_i| \cdot \underbrace{|\overline{v_j}|}_{= |v_j|}$$

$\uparrow$ $\mathrm{Re}(b_{jj}) < 0$

$$\leq -\left(\min_{j=1,\dots,m} |\mathrm{Re}(b_{jj})| \right) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^m |v_j|^2}_{= \|v\|_2^2} + \varepsilon \left(\max_{j=1,\dots,m} \max_{i=j+1,\dots,m} \varepsilon^{i-j-1} |b_{ji}| \right) \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=j+1}^m |v_i| \cdot |v_j|$$

$0 \leq (a-b)^2 \Rightarrow a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$a := |v_i|,\ b := |v_j|$

$$\leq -\left(\min_{j=1,\dots,m} |\mathrm{Re}(b_{jj})| \right) \cdot \|v\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\max_{j=1,\dots,m} \max_{i=j+1,\dots,m} \overbrace{\varepsilon^{i-j-1}}^{\leq 1} \cdot |b_{ji}| \right) \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=j+1}^m \left(|v_i|^2 + |v_j|^2 \right)$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^m}_{= m} \underbrace{\sum_{i=1}^m |v_i|^2}_{= \|v\|_2^2} + \underbrace{\sum_{j=1}^m |v_j|^2}_{= \|v\|_2^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^m}_{= m} = 2m \|v\|_2^2$$

$$\leq -\underbrace{\left[\left(\min_{j=1,\dots,m} |\mathrm{Re}(b_{jj})| \right) - \varepsilon m \left(\max_{j=1,\dots,m} \max_{i=j+1,\dots,m} |b_{ji}| \right) \right]}_{=: \beta = \beta(\varepsilon, m, B) > 0, \text{ für } 0 < \varepsilon < \min\left\{ \left(\min_{j=1,\dots,m} |\mathrm{Re}(b_{jj})| \right) \cdot \left(\max_{j=1,\dots,m} \max_{i=j+1,\dots,m} |b_{ji}| \right)^{-1},\ 1 \right\}} \cdot \|v\|_2^2$$

$$= -\beta \cdot \|v\|_2^2$$

Erinnerung 3: (Schursche Normalform ⇝ Numerik 1, Satz 11.2)

$\forall A \in \mathbb{C}^{m,m}\ \exists Q \in \mathbb{C}^{m,m}$ unitär (d.h. $\overline{Q}^T Q = I$):

$$\overline{Q}^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ obere } \Delta\text{'s-Matrix}$$

wobei $\lambda_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \dots, m)$ die Eigenwerte von A sind und so oft auf der Diagonalen vorkommen, wie ihre algebraische Vielfachheit angibt.

Vorbemerkung 2: Sei $A \in \mathbb{C}^{m,m}$ beliebig und es gelte ①. Dann gilt für $u \in \mathbb{C}^m$:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(\langle u, Au \rangle_H) \\
&= \operatorname{Re}(\langle u, HAu \rangle_2) \\
&= \operatorname{Re}(\overline{u}^T H A u) \\
&\overset{Q\overline{Q}^T = I}{=} \operatorname{Re}(\overline{u}^T H Q \overline{Q}^T A Q \overline{Q}^T u) \\
&\overset{DD^{-1} = I}{=} \operatorname{Re}(\overline{u}^T H Q D (D^{-1} \underbrace{\overline{Q}^T A Q}_{\substack{\text{obere}\\ \Delta\text{'s-Matrix}\\ \text{(Schur)}}} D) D^{-1} \overline{Q}^T u) \\
&\overset{H := QD^{-2}\overline{Q}^T}{=} \operatorname{Re}(\overline{u}^T Q D^{-1} (D^{-1} \overline{Q}^T A Q D) D^{-1} \overline{Q}^T u) \\
&= \operatorname{Re}((\underbrace{(D^{-1})^T}_{= D^{-1} \text{ (da } D \text{ Diagonalmatrix)}} Q^T \overline{u})^T (D^{-1} \overline{Q}^T A Q D) D^{-1} \overline{Q}^T u) \\
&= \operatorname{Re}(\underbrace{(\overline{D^{-1} \overline{Q}^T u})^T}_{=: v} (D^{-1} \underbrace{\overline{Q}^T A Q}_{=: B} D) \underbrace{D^{-1} \overline{Q}^T u}_{=: v}) \\
&\overset{\text{Vorbemerkung 1}}{\leq} -\beta \cdot \|D^{-1} \overline{Q}^T u\|_2^2 \\
&\leq -\beta \cdot \|\overline{Q}^T u\|_2^2 \\
&\overset{Q \text{ unitär}}{=} -\beta \cdot \|u\|_2^2 \qquad \forall u \in \mathbb{C}^m
\end{aligned}$$

$\|u\|_2^2 = \|DD^{-1}u\|_2^2 \leq \|D\|_2^2 \cdot \|D^{-1}u\|_2^2 \leq \|D^{-1}u\|_2^2$

$\Rightarrow \|D^{-1}u\|_2^2 \geq \|u\|_2^2$

Hierbei ist $H := QD^{-2}\overline{Q}^T$ hermitsch

$$H = QD^{-2}\overline{Q}^T = (\overline{Q}\,(D^{-2})^T Q^T)^T \underset{\substack{\uparrow\\ D \text{ Diagonalmatrix}}}{=} \overline{(QD^{-2}\overline{Q}^T)}^T = \overline{H}^T$$

und positiv definit

$$\overline{u}^T H u = \overline{u}^T Q D^{-2} \overline{Q}^T u = (\overline{\overline{Q}^T u})^T D^{-2} (\overline{Q}^T u) \underset{\substack{\uparrow\\ D \text{ pos definit}\\ \Rightarrow D^{-2} \text{ positiv definit}}}{>} 0 \quad \forall u \in \mathbb{C}^m$$

Zurück zur Aufgabe: Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ beliebig und es gelte ①. Dann gilt für $u \in \mathbb{R}^m$ (Setze: $\tilde{H} := \operatorname{Re}(H)$ und $\alpha := \beta > 0$):

$$\begin{aligned}
&\langle u, Au\rangle_{\tilde{H}}\\
&= \langle u, \mathrm{Re}(H)\, Au\rangle_2\\
&= u^T \mathrm{Re}(H)\, Au\\
&= \mathrm{Re}(\bar{u}^T H A u)\\
&= \mathrm{Re}(\langle u, Au\rangle_H)\\
&\underset{\text{Vorbemerkung 2}}{\leq} -\beta \cdot \|u\|_2^2 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{H} := \mathrm{Re}(H) \in \mathbb{R}^{m,m}$ symmetrisch

$$\tilde{H} = \mathrm{Re}(H) = \mathrm{Re}(\bar{H}) \underset{H \text{ hermitsch}}{\overset{\uparrow}{=}} \mathrm{Re}(H^T) = \mathrm{Re}(H)^T = \tilde{H}^T$$

und positiv definit

$$u^T \tilde{H} u = \bar{u}^T \mathrm{Re}(H) u = \mathrm{Re}(\underbrace{\bar{u}^T H u}_{>0 \text{ (da } H \text{ pos. definit)}}) > 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Falls $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ bereits als obere Δ's-Matrix vorliegt, so gilt für die Schursche Transformationsmatrix $Q = \bar{Q}^T = I$ und somit $H = D^{-2} = \mathrm{Re}(H) = \tilde{H}$.

zu (b): Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi(A) := \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 6$$
$$= (\lambda - (-1+2i)) \cdot (\lambda - (-1-2i))$$

und den Eigenwerten

$$\lambda_1 = -1 + 2i \quad , \ \mathrm{Re}(\lambda_1) = -1 < 0$$
$$\lambda_2 = -1 - 2i \quad , \ \mathrm{Re}(\lambda_2) = -1 < 0$$

Diese Matrix erfüllt offenbar die Eigenschaft 1. Betrachte nun den symmetrischen Anteil der Matrix A

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi\left(\tfrac{1}{2}(A + A^T)\right) = \det\left(\tfrac{1}{2}(A + A^T) - \lambda I\right) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 - \frac{9}{4}$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}(2\lambda + 5)(2\lambda - 1)$$

den Eigenwerten

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{5}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{symmetrischer Anteil ist indefinit}$$

und zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zz: $\exists u \in \mathbb{R}^2 \; \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0: \; \langle u, Au \rangle_H \nleq -\beta \langle u, u \rangle$

d.h. $u = v_2$

Nehme denjenigen Eigenvektor von $\frac{1}{2}(A + A^T)$ zum Eigenwert λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle v_2, Av_2 \rangle_{H=I} &= v_2^T A v_2 \\
&= \frac{1}{2} v_2^T A v_2 + \frac{1}{2} (v_2^T A v_2)^T \\
&= \frac{1}{2} v_2^T A v_2 + \frac{1}{2} v_2^T A^T v_2 \\
&= v_2^T \frac{1}{2}(A + A^T) v_2 \\
&= \langle v_2, \frac{1}{2}(A + A^T) v_2 \rangle_2 \\
&= \langle v_2, \lambda_2 v_2 \rangle_2 \\
&= \lambda_2 \langle v_2, v_2 \rangle_2 \\
&= \frac{1}{2} \|v_2\|_2^2 \nleq -\beta \|v_2\|_2^2 \quad \forall \beta > 0
\end{aligned}
$$

Damit ist 2 nicht erfüllt, insofern $H = I$ gewählt wird.