Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 5
13.5.2011

Abgabe: Freitag, 20.5.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 15: Sei $(\mathbb{R}^m, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}})$ ein stetiges dynamisches System.

- Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ heißt **global anziehend**, falls

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi^t(v), M) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig und sei $\{u_1, \dots, u_k\}$ ein k-periodischer Orbit des durch φ erzeugten diskreten dynamischen Systems $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Beweisen Sie die folgende Aussage:

- Ist die Menge $M = \{u_1, \dots, u_k\}$ stabil und global anziehend, so folgt $k = 1$, d. h. nur Fixpunkte können stabil und global anziehend sein.

(6 Punkte)

Aufgabe 16: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1 - u_1^2 - u_2^2) \\ u_1 + u_2(1 - u_1^2 - u_2^2) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Transformieren Sie das System (1) mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$(u_1, u_2) = P(r, \theta) := r(\cos\theta, \sin\theta)$$

auf

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(b) Welche Beziehung besteht zwischen den Flüssen φ^t von (1) und ψ^t von (2) ?

(c) Zeigen Sie, dass (1) eine asymptotisch stabile periodische Lösung besitzt, die aus einem Kreis vom Radius R ($R =?$) besteht.

(d) Besitzt dieses System (unzerlegbare) Attraktoren ?

(6 Punkte)

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Approximation der Lösungen von (1) mit dem expliziten Euler-Verfahren

$$\Phi_{\Delta t}(u) = u + \Delta t f(u), \quad 0 < \Delta t < 1. \tag{3}$$

(i) Leiten Sie aus der Gleichung

$$\Phi_{\Delta t}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\rho\cos\gamma, \rho\sin\gamma)$$

eine Beziehung der Form $\rho = g_{\Delta t}(r)$ her.

(ii) Zeigen Sie, dass (3) zwei invariante Kreise mit Radien $R_-(\Delta t)$, $R_+(\Delta t)$ besitzt.

(iii) Wie verhält sich

$$R_\pm(\Delta t) \text{ für } \Delta t \longrightarrow 0\,?$$

► Alternativ können Sie diese Untersuchungen auch numerisch durchführen. ◄

(6 Punkte)

Aufgabe 15:

Gegeben:

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}})$ diskretes dynamisches System

$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig $(\varphi = \varphi^1)$

$M := \{u_1, \dots, u_K\}$ K-periodischer Orbit , $K \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Aufgabe:

M stabil & global anziehend $\Rightarrow K = 1$

Definition: $(\mathbb{R}^m, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}})$ stetiges dynamisches System, $M \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen. M heißt global anziehend

$$:\Leftrightarrow \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{T}}} \underbrace{\operatorname{dist}(\varphi^t(v), M)}_{:= \inf_{u\in M} d(\varphi^t(v), u)} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$$

Lösung: Angenommen $K > 1$. 1. Da M stabil ist gilt zunächst

$$\forall U \supset M \ \exists \underset{\neq \emptyset}{V} \subset U : \varphi^n(V) \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

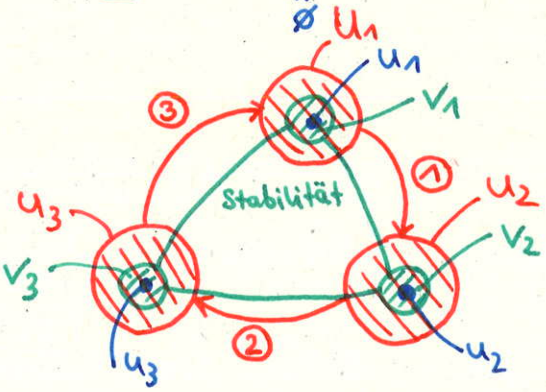

Abbildung: K=3

Erläuterung der Abbildung: Zunächst wählen wir uns eine offene Umgebung um u_1 (roter Kreis). Dieser Kreis wird aufgrund der Stetigkeit von φ und wegen des periodischen Orbits auf eine (nicht notwendigerweise offene) Umgebung von u_2 abgebildet. Für den Fall, dass diese Umgebung nicht offen ist, vergrößern wir diese Menge minimal zu einer offenen Menge und erhalten den roten Kreis um u_2. Nun nehmen wir diese offene Menge und erhalten durch Anwendung von φ auf analoge Weise eine offene Menge um u_3 (roter Kreis). Wegen der Stabilität gibt es zu $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ eine Umgebung $V \subset U$, die wegen des K-periodischen Orbits die Form $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ haben muss.

2. Betrachte nun das von φ^K erzeugte dynamische System $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, (\varphi^{Kn})_{n\in\mathbb{N}})$. Für dieses System sind $u_1, \dots, u_K$ asymptotisch stabile Fixpunkte (da der periodische Orbit M für $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}})$ stabil & global anziehend ist).

3. Definiere

$$\underbrace{\emptyset \neq W_j}_{\Rightarrow \text{ offen}} := \underbrace{\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} \underbrace{\varphi^{-Ki}(\overbrace{V_j}^{\text{offen}})}_{\text{offen (da } \varphi \text{ stetig)}}}_{\text{offen (da } \mathbb{R}^m \text{ topol. Raum)}} \quad , j=1,\dots,K$$

„Urbilder offener Mengen sind offen, insofern die Funktion stetig ist"

wobei

$$\varphi^{-Ki}(V_j) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \varphi^{Ki}(u) \in V_j\} \quad , \begin{array}{l} j=1,\dots,K \\ i=1,2,3,\dots \end{array}$$

4. Wegen der globalen Anziehung gilt nun

$$\mathbb{R}^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{globale} \\ \text{Anziehung von } M}}{=} \dot{\bigcup_{j=1}^{K}} W_j \quad \lightning \ K>1$$

(denn: Es gibt nur eine Möglichkeit für eine disjunkte Zerlegung des $\mathbb{R}^m$ in offene Mengen: $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \dot\cup \emptyset \dot\cup \emptyset \dot\cup \dots \dot\cup \emptyset$
Aber somit wäre $W_j = \emptyset$ $\forall j$ bis auf ein j.
Dies kann nach 3. jedoch nicht sein.)

Daher muss $K=1$ gelten.

Aufgabe 16:

Gegeben:

$$\begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1-u_1^2-u_2^2) \\ u_1 + u_2(1-u_1^2-u_2^2) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Aufgabe:

1: Transformieren Sie das obige System mit Hilfe der Polarkoordinatentransformation

$$(u_1, u_2) = P(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

auf

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

2: Welche Beziehung besteht zwischen den Flüssen φ^t von (1) und φ^t von (2)?

3: Zeigen Sie, dass (1) eine „asymptotisch stabile periodische Lösung" besitzt, die aus dem Kreisrand eines Kreises vom Radius R besteht. Geben Sie R an.

4: Besitzt dieses System (unzerlegbare) Attraktoren?

Lösung:

zu 1: Betrachte die Polarkoordinatentransformation

$$(u_1, u_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad (3)$$

wobei $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $r = r(t)$ und $\theta = \theta(t)$. Einmaliges Differenzieren nach t liefert (unter Verwendung der Produkt- & Kettenregel)

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta \\ \dot u_2 &= \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad (4)$$

Daraus erhalten wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_{-\theta}} \begin{pmatrix} \dot r \\ r\dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta \\ \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta \end{pmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1-u_1^2-u_2^2) \\ u_1 + u_2(1-u_1^2-u_2^2) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} -r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)) \\ r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Eulersche Formel}}{=} \begin{pmatrix} -r\sin\theta + r(1-r^2)\cdot\cos\theta \\ r\cos\theta + r(1-r^2)\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=R_{-\theta}} \begin{pmatrix} r - r^3 \\ r \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Um die Gleichung zu entkoppeln multiplizieren wir beide Seiten von links mit der Drehmatrix

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Beachte hierbei, dass R_θ invertierbar ist $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Wegen $R_\theta R_{-\theta} = I$

$$\begin{aligned} R_\theta \cdot R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{Eulersche} \\ \text{Formel}}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten wir aus (5) durch Linksmultiplikation mit R_θ

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ r\dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^3 \\ r \end{pmatrix}$$

Wir werden später sehen, dass $r(t) \neq 0 \ \forall t \geq 0$, daher können wir die zweite Gleichung durch r teilen und erhalten (2).

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu ②: • Lösung von (2): Betrachte das AWP

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r(0) = r_0 \overset{\text{da } r \text{ Radius}}{>} 0, \quad \theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{R} \qquad (6)$$

Die allgemeine Lösung von (6) ist gegeben durch

$$r(t) = \pm(1 + C \cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta(t) = t + C$$

Die spezielle Lösung von (6) ist gegeben durch

$$r(t; r_0) = r_0 \cdot (r_0^2 + (1 - r_0^2) \cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta(t; \theta_0) = t + \theta_0$$

Somit ist der Fluss ψ^t von (6) gegeben durch

$$\psi^t(r_0, \theta_0) = \left(r_0 \cdot (r_0^2 + (1 - r_0^2) \cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}, t + \theta_0\right), \quad t \geq 0$$

• Lösung von (1): Betrachte das AWP

$$\begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1 - u_1^2 - u_2^2) \\ u_1 + u_2(1 - u_1^2 - u_2^2) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u_1(0) = u_{10} \\ u_2(0) = u_{20} \end{matrix} \qquad (7)$$

Die allgemeine Lösung von (7) ist gegeben durch

$$u_1(t) = \pm(1 + C \cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(t + C)$$

$$u_2(t) = \pm(1 + C \cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(t + C)$$

Die spezielle Lösung von (7) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_1(t; u_{10}) &= \pm\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2} \cdot \left(u_{10}^2 + u_{20}^2 + (1 - u_{10}^2 - u_{20}^2) \cdot e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \cos\left(t + \arccos\left(\frac{u_{10}}{\pm\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2}}\right)\right) \\ u_2(t; u_{20}) &= \pm\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2} \cdot \left(u_{10}^2 + u_{20}^2 + (1 - u_{10}^2 - u_{20}^2) \cdot e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \sin\left(t + \arccos\left(\frac{u_{10}}{\pm\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2}}\right)\right) \end{aligned}, \quad t \geq 0$$

Somit ist der Fluss φ^t von (7) gegeben durch

$$\varphi^t(\underbrace{u_{10}}_{=r_0\cos\theta_0},\underbrace{u_{20}}_{=r_0\sin\theta_0}) = r(t;r_0)\cdot\left(\cos\theta(t;\theta_0),\ \sin\theta(t;\theta_0)\right)$$

$$= \pm\sqrt{u_{10}^2+u_{20}^2}\cdot\left(u_{10}^2+u_{20}^2+(1-u_{10}^2-u_{20}^2)\cdot e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left(\cos\left(t+\arccos\left(\frac{u_{10}}{\pm\sqrt{u_{10}^2+u_{20}^2}}\right)\right),\ \sin\left(t+\arccos\left(\frac{u_{10}}{\pm\sqrt{u_{10}^2+u_{20}^2}}\right)\right)\right)$$

- Die Beziehung zwischen den Flüssen ψ^t von (6) und φ^t von (7) ist durch

$$\varphi^t\circ P = P\circ\psi^t$$

gegeben:

$$(\varphi^t\circ P)(r_0,\theta_0) = \varphi^t(P(r_0,\theta_0))$$
$$= \varphi^t(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$$
$$= r(t;r_0)\cdot\left(\cos\theta(t;\theta_0),\ \sin\theta(t;\theta_0)\right)$$
$$= \left(r_0(r_0^2+(1-r_0^2)\cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(t+\theta_0),\ r_0(r_0^2+(1-r_0^2)\cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin(t+\theta_0)\right)$$
$$= P\left(r_0(r_0^2+(1-r_0^2)\cdot e^{-2t})^{-\frac{1}{2}},\ t+\theta_0\right)$$
$$= P(\psi^t(r_0,\theta_0)) = (P\circ\psi^t)(r_0,\theta_0)$$

Zu 3: Wegen

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} r_0\left(r_0^2+(1-r_0^2)\cdot\underbrace{e^{-2t}}_{\to 0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= r_0\cdot(r_0^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 \quad \forall r_0\neq 0,\ r_0>0$$

ist der Fixpunkt $\bar{r}=1$ anziehend und stabil, also asymptotisch stabil. (Der zweite Fixpunkt $\bar{r}=0$ ist im Übrigen abstoßend). Daraus folgt nun, dass der Kreisrand $\partial B_1(0)$ anziehend und stabil (für das Ausgangssystem (1)) ist, also asymptotisch stabil. Beachte, dass diese Lösung für das System (1) einen periodischen Orbit (d.h. eine periodische Lösung) beschreibt.

Zu 4: Der Attraktor von (1) ist gegeben durch $A := \partial B_1(0)$. Dieser Attraktor ist nicht zerlegbar.

Aufgabe 17

Gegeben: (8)

$$\phi_{\Delta t}(u) := u + \Delta t \cdot f(u) \quad , \; 0 < \Delta t < 1 \qquad \text{(expl. Euler-Verfahren)}$$

$$f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1-u_1^2-u_2^2) \\ u_1 + u_2(1-u_1^2-u_2^2) \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

① : Leiten Sie aus der Gleichung

$$\phi_{\Delta t}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\varrho\cos\gamma, \varrho\sin\gamma)$$

eine Beziehung der Form $\varrho = g_{\Delta t}(r)$ her.

② : Zeigen Sie, dass (8) zwei invariante Kreise mit den Radien $R_-(\Delta t)$ und $R_+(\Delta t)$ besitzt.

③ : Wie verhalten sich diese Radien $R_-(\Delta t)$ und $R_+(\Delta t)$ beim Grenzübergang $\Delta t \to 0$?

Lösung:

zu ①: Analog zum Aufgabenteil 16 ① erhalten wir

$$\phi_{\Delta t}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta + \Delta t\cdot(-r\sin\theta + r\cos\theta\cdot(1-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta))) \\ r\sin\theta + \Delta t\cdot(r\cos\theta + r\sin\theta\cdot(1-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta))) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta + \Delta t\cdot(-r\sin\theta + r\cos\theta\cdot(1-r^2)) \\ r\sin\theta + \Delta t\cdot(r\cos\theta + r\sin\theta\cdot(1-r^2)) \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} \varrho\cos\gamma \\ \varrho\sin\gamma \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= \varrho^2\cos^2\gamma + \varrho^2\sin^2\gamma \\
&= (r\cos\theta + \Delta t\cdot(-r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2)))^2 \\
&\quad + (r\sin\theta + \Delta t\cdot(r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2)))^2 \\
&= r^2\cos^2\theta + 2r\cos\theta\,\Delta t(-r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2)) \\
&\qquad + (\Delta t)^2\cdot(-r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2))^2 \\
&\quad + r^2\sin^2\theta + 2r\sin\theta\,\Delta t(r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2)) \\
&\qquad + (\Delta t)^2\cdot(r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2))^2 \\
&= r^2\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{=1} \\
&\quad + 2\Delta t\, r^2(-\cancel{\sin\theta\cos\theta} + \boxed{\cos^2\theta}(1-r^2) + \cancel{\sin\theta\cos\theta} + \boxed{\sin^2\theta}(1-r^2)) \\
&\quad + (\Delta t)^2 r^2 (\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1} - \cancel{2\sin\theta\cos\theta(1-r^2)} + \cancel{2\sin\theta\cos\theta(1-r^2)} + \underbrace{\cos^2\theta(1-r^2)^2 + \sin^2\theta(1-r^2)^2}_{=1\cdot(1-r^2)^2}) \\
&= r^2 + 2\Delta t\, r^2(1-r^2) + (\Delta t)^2(r^2 + r^2(1-r^2)^2) \\
&= r^2(1 + 2\Delta t(1-r^2) + (\Delta t)^2(1 + (1-r^2)^2)) \\
&=: g_{\Delta t}(r)
\end{aligned}$$

zu ②: Invariante Kreise erhalten wir durch die Gleichung $r^2 = g_{\Delta t}(r)$, d.h.

$$r^2 = r^2(1 + 2\Delta t(1-r^2) + (\Delta t)^2(1+(1-r^2)^2))$$

$$\Leftrightarrow 0 = -2\Delta t(r^2-1) + (\Delta t)^2(1+(r^2-1)^2)$$

Die Transformation $\delta = r^2 - 1$ liefert die Gleichung

$$0 = -2\Delta t \cdot \delta + (\Delta t)^2(1+\delta^2)$$

$$= (\Delta t)^2 \cdot \delta^2 - 2\Delta t\,\delta + (\Delta t)^2$$

$$\overset{\Delta t > 0}{\Rightarrow} 0 = \delta^2 - \frac{2}{\Delta t} \cdot \delta + 1$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die zwei Lösungen

$$\delta_\pm = \frac{1}{\Delta t} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\Delta t}\left(1 \pm \sqrt{1-(\Delta t)^2}\right)$$

Die Rücktransformation ($\delta_\pm = r^2 - 1 \Rightarrow r = \sqrt{1+\delta_\pm}$) liefert die zwei Lösungen

$$R_-(\Delta t) = \sqrt{1+\delta_-} = \sqrt{1 + \frac{1}{\Delta t}\left(1 - \sqrt{1-(\Delta t)^2}\right)}$$

$$R_+(\Delta t) = \sqrt{1+\delta_+} = \sqrt{1 + \frac{1}{\Delta t}\left(1 + \sqrt{1-(\Delta t)^2}\right)}$$

zu ③: Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert

$$\lim_{\Delta t \to 0} R_-(\Delta t) = 1$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} R_+(\Delta t) = \infty$$

Damit deckt sich das Ergebnis beim Grenzübergang $\Delta t \to 0$ mit dem aus Aufgabe 16 ③.