

# Übungen zur Vorlesung Numerik dynamischer Systeme Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls  
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 6  
20.5.2011

**Abgabe: Freitag, 27.5.2011, 10:00 Uhr**

**Aufgabe 18:** Wir betrachten erneut das Modell einer Futterkette aus Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass sich das System mit Hilfe der Beziehung  $u_1 + u_2 + u_3 = 1$  auf zwei Variablen zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \alpha(1 - u_1) - u_2 f_1(u_1), & f_1(u_1) &= \frac{u_1}{1 + u_1}, \\ \dot{u}_2 &= -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - (1 - u_1 - u_2) f_2(u_2), & f_2(u_2) &= \frac{u_2}{2 + u_2} \end{aligned}$$

reduzieren lässt. Fertigen Sie für das reduzierte System 2D-Phasenbilder an (zum Beispiel mit der Numlab-Toolbox). Verwenden Sie dabei

$\alpha$	$u_1$	$u_2$
0.1	[-0.5, 2]	[-0.5, 2]
0.4	[0, 2]	[-0.5, 2]
0.7	[-0.5, 3]	[-2, 5]

als Parameter und Wertebereiche.

(6 Punkte)

**Aufgabe 19:** Gegeben sei das zeitdiskrete dynamische System  $(\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n \in \mathbb{Z}})$ , mit

$$\varphi(u) := \frac{1}{1 + u^2}.$$

- Sei  $U$  das offene Intervall  $U = (0, 2)$ . Zeigen Sie, dass  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(U)$  ein Attraktor ist und geben Sie diesen Attraktor explizit an.
- Beweisen Sie, dass das obige dynamische System einen globalen Attraktor besitzt, der nur aus einem Punkt besteht.

(6 Punkte)

**Aufgabe 20:** Gegeben sei das durch die Abbildung  $\varphi(u) = \sin(u) + u$  erzeugte zeitdiskrete dynamische System.

Implementieren Sie – für ein-dimensionale Systeme – den in der Vorlesung vorgestellten Box-Unterteilungs-Algorithmus zur Approximation relativer globaler Attraktoren  $M_Q$ .

Führen Sie 10 Verfeinerungsschritte durch und zeichnen Sie nach jedem Schritt die übrig gebliebenen Intervalle. Verwenden Sie in Schritt 2 jeweils 10 äquidistant verteilte Testpunkte pro Intervall.

Starten Sie ihr Programm mit den Intervallen

- $Q_1 = [1, 5]$
- $Q_2 = [1, 7]$
- $Q_3 = [1, 11]$

und interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

(6 Punkte)

# Aufgabe 18:

Gegeben:

$$\dot{u}_1 = \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1)$$

$$\dot{u}_2 = -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2)$$

$$\dot{u}_3 = -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2)$$

mit  $f_1(u_1) = \frac{u_1}{1+u_1}$  und  $f_2(u_2) = \frac{u_2}{2+u_2}$  (Vgl. Aufgabe 12 mit  $a_1 = b_1 = b_2 = 1, a_2 = 2$ )

Aufgabe: ①: Reduzieren Sie das System mittels der Transformation  $u_1 + u_2 + u_3 = 1$  auf

$$\dot{u}_1 = \alpha(1 - u_1) - u_2 f_1(u_1)$$

$$\dot{u}_2 = -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - (1 - u_1 - u_2) f_2(u_2)$$

②: Fertigen Sie 2D-Phasenbilder für das reduzierte System an unter Verwendung der folgenden Parameter und Wertebereiche

	$\alpha$	$u_1$	$u_2$
Ⓐ:	0.1	$[-0.5, 2]$	$[-0.5, 2]$
Ⓑ:	0.4	$[0, 2]$	$[-0.5, 2]$
Ⓒ:	0.7	$[-0.5, 3]$	$[-2, 5]$

Lösung:

zu ①: Es gilt

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 \Rightarrow u_3 = 1 - u_1 - u_2$$

Setze  $u_3 = 1 - u_1 - u_2$  in die Ausgangs-DGL ein, so erhalten wir

$$\dot{u}_1 = \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1)$$

$$\dot{u}_2 = -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - (1 - u_1 - u_2) f_2(u_2)$$

$$-\dot{u}_1 - \dot{u}_2 = -\alpha(1 - u_1 - u_2) + (1 - u_1 - u_2) f_2(u_2)$$

Hierbei ist die 3. Gleichung automatisch erfüllt, insofern  $(u_1, u_2)$  eine Lösung der 1. & 2. Gleichung darstellt, denn Addition der ersten beiden Gleichungen liefert:

$$\dot{u}_1 + \dot{u}_2 = \alpha - \alpha u_1 - \underbrace{u_2 f_1(u_1) - \alpha u_2 + u_2 f_1(u_1)}_{=0} - (1 - u_1 - u_2) f_2(u_2)$$

$$= \alpha(1 - u_1 - u_2) - (1 - u_1 - u_2) f_2(u_2)$$

Multiplikation mit  $(-1)$  liefert die 3. Gleichung. Daher können wir die 3. Gleichung (zum Lösen des Systems nach  $(u_1, u_2)$ ) fortlassen.

zu ②: Hierzu verwenden wir die NUNLAB-Toolbox „Autonome Differentialgleichungen 2D“:

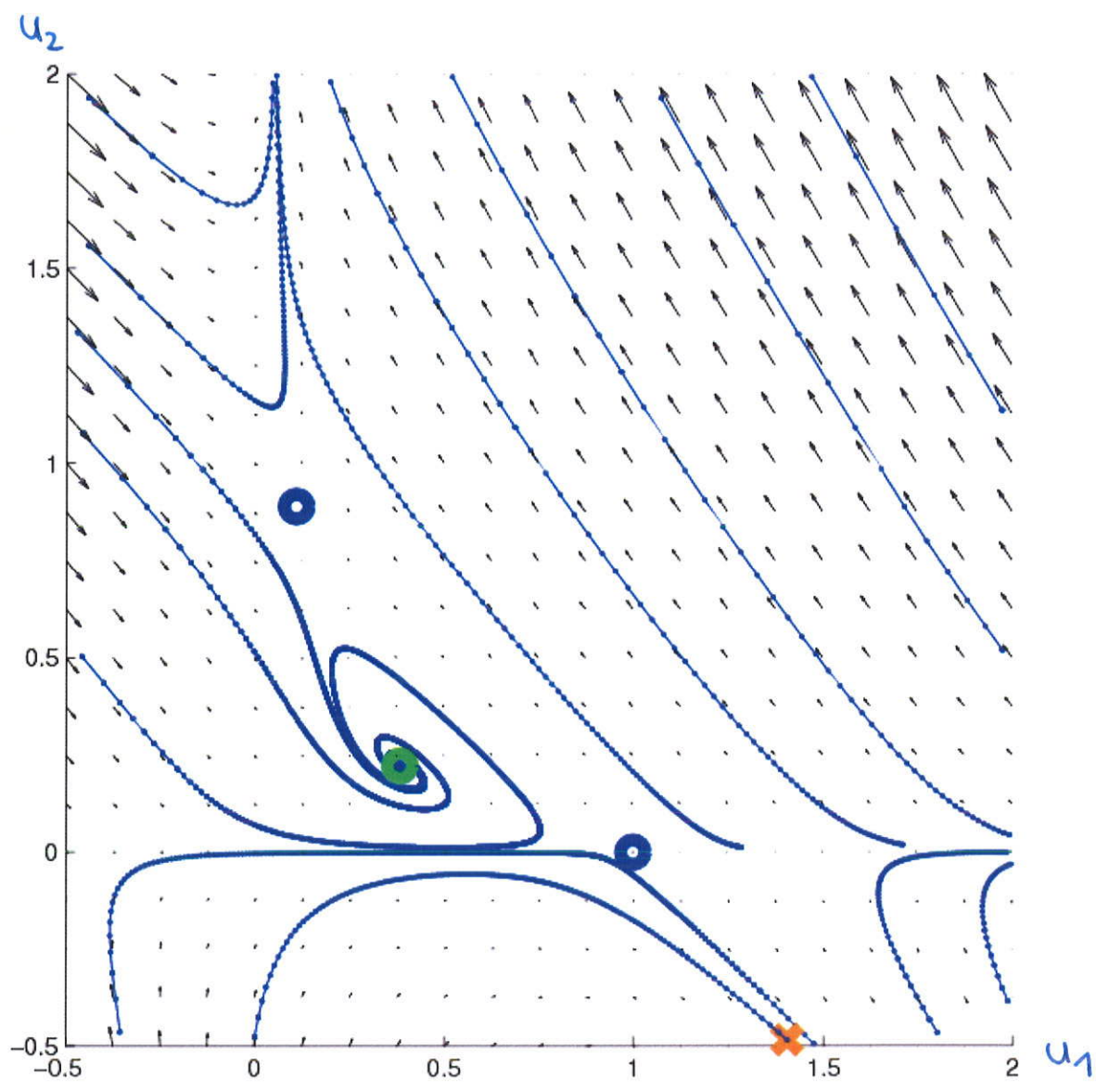


Abbildung 1:  $\alpha = 0.1$  (Aufgabenteil a)

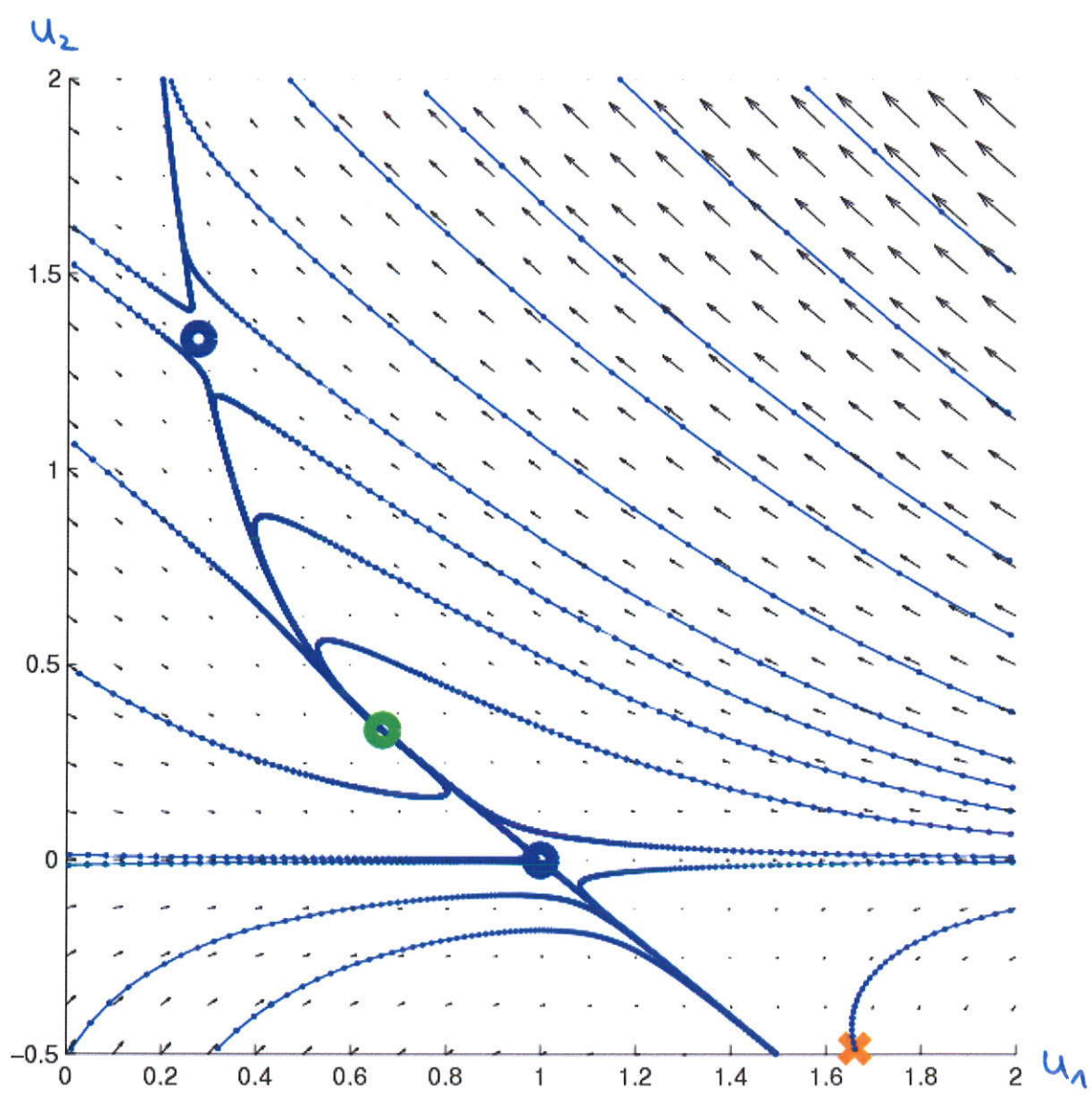


Abbildung 2:  $\alpha = 0.4$  (Aufgabenteil b)

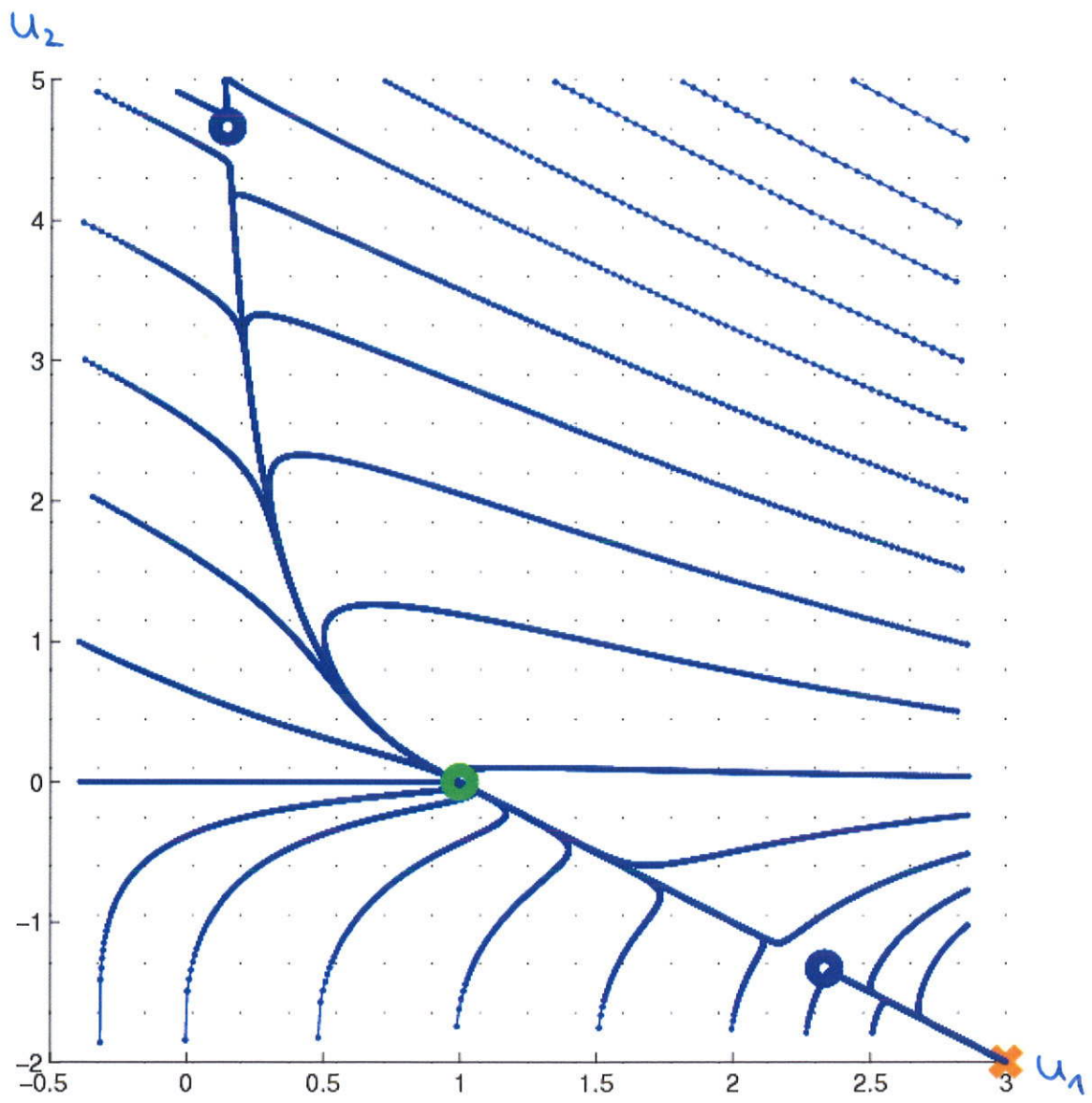


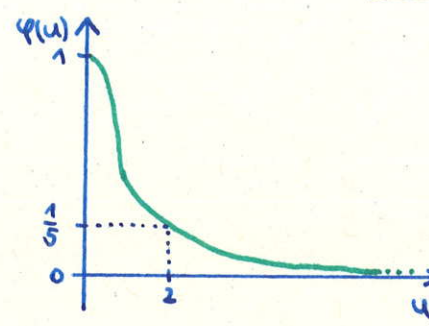
Abbildung 3:  $\alpha = 0.7$  (Aufgabenteil ©)

# Aufgabe 19:

Gegeben:

$(\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n \in \mathbb{Z}})$  dynamisches System

$$\varphi(u) := \frac{1}{1+u^2}$$



Aufgabe:

①:  $U := ]0, 2[$ . Zeigen Sie

- $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(U)$  ist ein Attraktor
- Geben Sie eine Darstellung von  $M$  an

②: Beweisen Sie, dass das obige dynamische System einen globalen Attraktor besitzt, der nur aus einem Punkt besteht.

Lösung:

## 1. VORBEMERKUNG:

zu ①: • Fixpunkte von  $\varphi$ :

$$u \stackrel{!}{=} \varphi(u) = \frac{1}{1+u^2} \Leftrightarrow u^3 + u - 1 = 0$$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen

$$u_1 = \frac{(\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}}) - 12}{6 \cdot (\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}})^{1/3}}$$

$$u_{2,3} = \frac{-(\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}}) + 12}{12 \cdot (\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}})^{1/3}} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}}) + 12\sqrt{3}}{12 \cdot (\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}})^{1/3}}$$

Die Ableitung von  $\varphi$  ist gegeben durch

$$\varphi'(u) = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}$$

Wegen

$$\varphi'(u_1) \approx -0.6353443919$$

ist der Fixpunkt asymptotisch stabil.

## 2. Erinnerung: (Satz 7.2)

$(X, \pi, (\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}})$  stetiges DS,  $U \subset X$  offen mit

Ⓐ:  $\varphi^t(\bar{u}) \subset U \quad \forall t > 0, t \in \mathbb{R}$

Ⓑ:  $\varphi^t(U)$  ist relativ kompakt  $\forall t > 0, t \in \mathbb{R}$

Dann ist

$$M := \bigcap_{\substack{t \geq 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \varphi^t(U)$$

ein Attraktor, der  $U$  anzieht. Es gilt:  $M = \omega(U)$

3. Um zu zeigen, dass  $M$  ein Attraktor ist, genügt es, die Voraussetzungen von Satz 7.2 zu überprüfen:

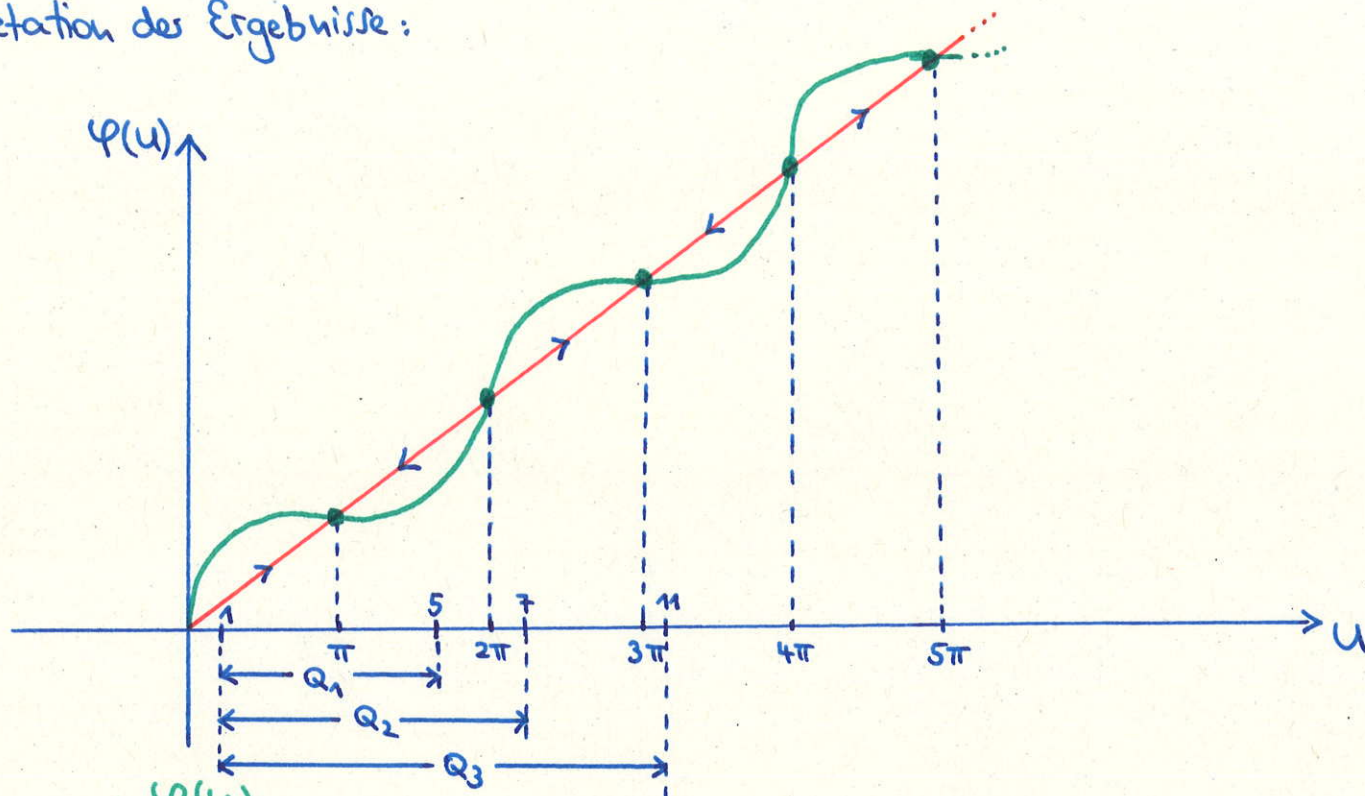
- Da die Funktion  $\varphi(u)$  für  $u \in \mathbb{R}_+$  keine Polstellen besitzt, ist sie offensichtlich stetig in  $u$ . Die Stetigkeit in  $t$  gilt wegen der diskreten Topologie.





# Aufgabe 20:

Interpretation der Ergebnisse:



- :  $\varphi(u)$
- : Fixpunkte (d.h.  $u$  mit  $\varphi(u) = u$ )
- : Gerade  $f(u) := u$

zu a): ( $Q_1 = [1, 5]$ )

$Q_1$  enthält genau einen Fixpunkt, da dieser anziehend ist, fallen ab einem gewissen Verfeinerungsschritt nahezu alle bis auf eine Box weg. Der Boxen-Unterteilungsalgorithmus konvergiert genau gegen den Punkt  $\bar{u} = \pi$ , da alle Trajektorien dorthin laufen.

zu b): ( $Q_2 = [1, 7]$ )

$Q_2$  enthält genau zwei Fixpunkte, von denen einer ( $\bar{u} = \pi$ ) ~~stabil~~ anziehend und einer ( $\bar{u} = 2\pi$ ) abstoßend ist. Da  $\bar{u} = \pi$  anziehend ist, verlieren wir beim Verfeinern das Teilintervall  $[1, \pi[$  zunehmend. Da von dem abstoßenden Fixpunkt ( $\bar{u} = 2\pi$ ) kontinuierlich Trajektorien fortlaufen, geht hierbei nichts weiter verloren. Man stelle sich den instabilen Fixpunkt „vorsichtig“ vor wie eine Quelle aus der neue Trajektorien hervorgehen. Somit konvergiert der Unterteilungsalgorithmus gegen das Intervall  $[\pi, 7]$

zu c): ( $Q_3 = [1, 11]$ )

$Q_3$  enthält genau drei Fixpunkte, von denen die äußeren ( $\bar{u} = \pi, \bar{u} = 3\pi$ ) anziehend sind und der mittlere ( $\bar{u} = 2\pi$ ) abstoßend ist. Mit der selben Argumentation wie in a) konvergiert der Unterteilungsalgorithmus gegen  $[\pi, 3\pi]$ .

```

function [] = aufgabe20()
figure
hold on
K = 10;           % Verfeinerungsschritte
X(1,1,1) = 1;    % linkes Intervallende von Q
X(1,1,2) = 11;   % rechtes Intervallende von Q
box = 1;         % Anzahl der Boxen (zu Beginn)
for i = 1:K
    box_neu = 0;
    for j = 1:box
        % 1. Wahl der zu betrachtenden Intervalls
        a=X(i,j,1); % linkes Intervallende im i-ten Verfeinerungsschritt der j-ten Box
        c=X(i,j,2); % rechtes Intervallende im i-ten Verfeinerungsschritt der j-ten Box
        b=(a+c)/2; % Mittelpunkt im i-ten Verfeinerungsschritt der j-ten Box

        % 2. Test des linken Teilintervalls
        W = Test(X,box,i,a,b);
        if W == 0
            box_neu = box_neu +1;
            X(i+1,box_neu,1) = a;
            X(i+1,box_neu,2) = b;
        end

        % 3. Test des rechten Teilintervalls
        W = Test(X,box,i,b,c);
        if W == 0
            box_neu = box_neu +1;
            X(i+1,box_neu,1) = b;
            X(i+1,box_neu,2) = c;
        end
    end
end

% 4. Plot
box = box_neu;
for ii = 1:box_neu
    x = [X(i+1,ii,1);X(i+1,ii,2)];
    if mod(ii,2) == 0
        plot(x,[i;i],'r','linewidth',15)
    else
        plot(x,[i;i],'k','linewidth',15)
    end
end
end
hold off
end

```

```

function V = Test(X,box,i,a,b)
% X :
% box: Anzahl der Boxen
% i : Verfeinerungsschritt
% a : linkes Intervallende
% b : rechtes Intervallende
% V : V=0 bedeutet, dass die Box getroffen wurde

```

```
%      V=1 bedeutet, dass die Box nicht getroffen wurde
V = 1;
for l = 1:box
    R = X(i,l,1); % linkes Intervallende im i-ten Verfeinerungsschritt der l-ten
    L = X(i,l,2); % rechtes Intervallende im i-ten Verfeinerungsschritt der
    r = (L-R)/9; % Intervalllaenge geteilt durch 10 (fuer die aequidistanten
    Testpunkte
    x = R:r:L; % aequidistant verteilte Testpunkte
    for k = 1:length(x)
        y = f(x(k));
        if ((y > a) && (y < b))
            V = 0;
            break
        end
    end
end
end
end
```

```
function y = f(x)
y = sin(x)+x;
end
```

Verfeinerungsschritt

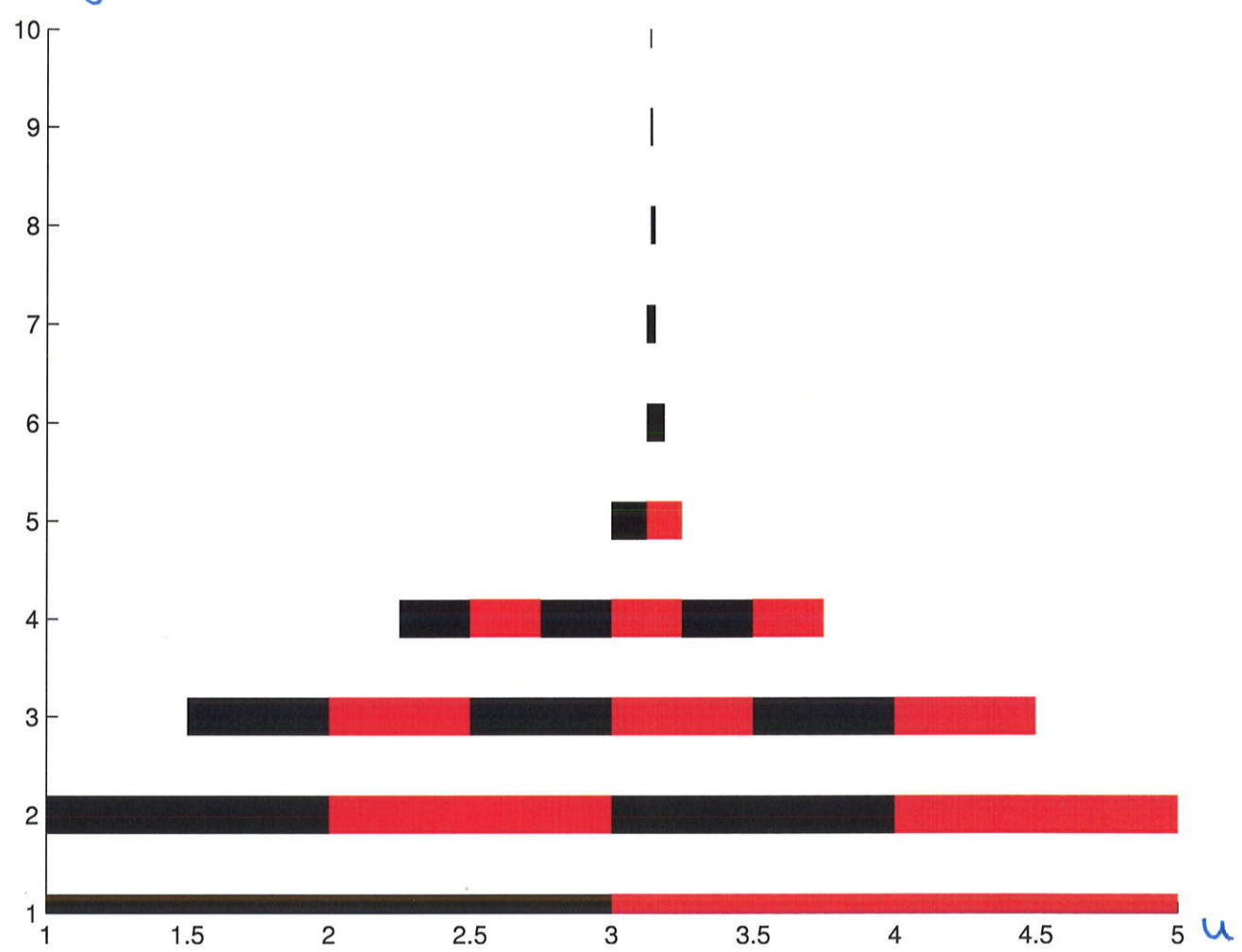


Abbildung 4:  $Q_1 = [1, 5]$  (Aufgabenteil 20 @)

Verfeinerungsschritt

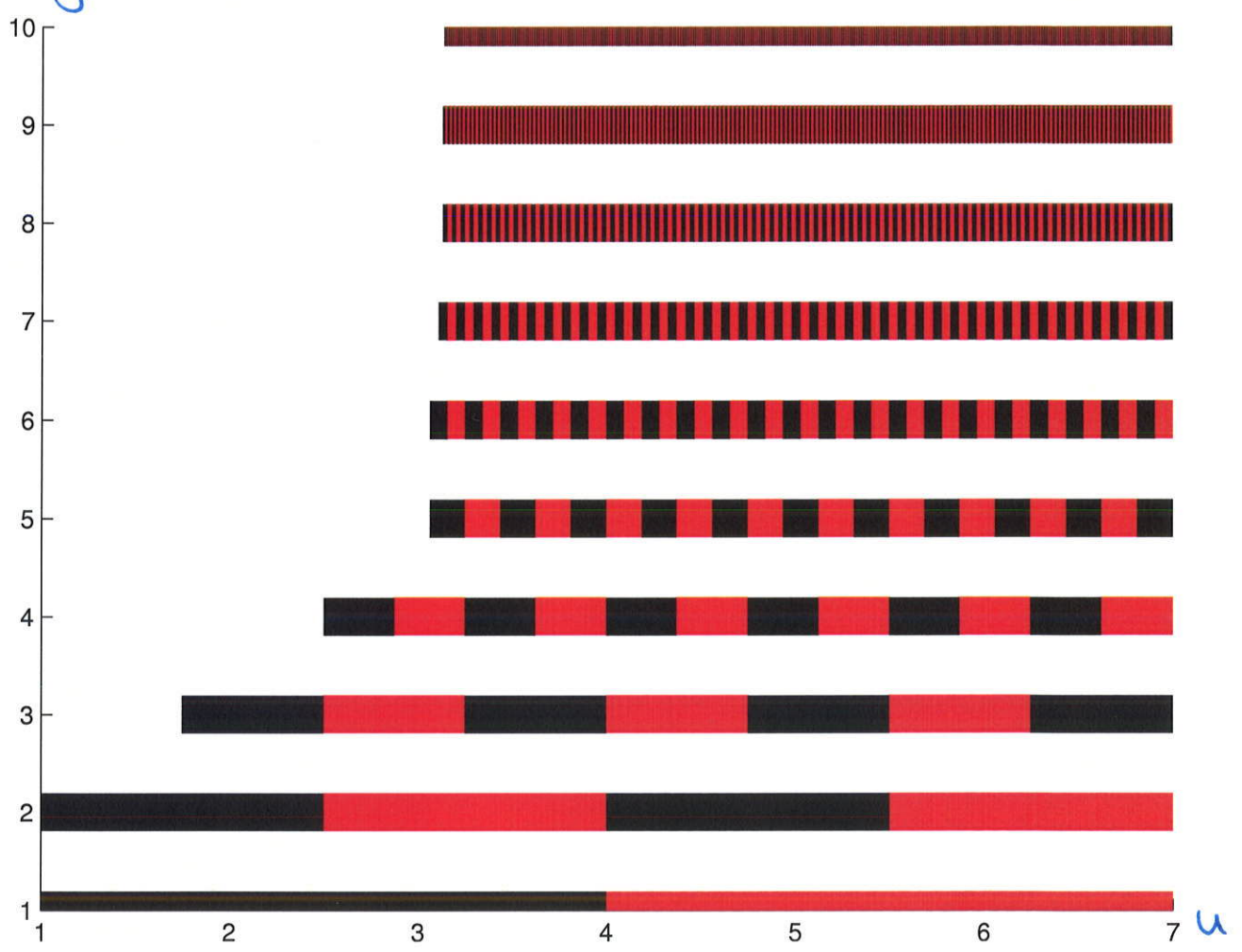


Abbildung 5:  $Q_2 = [1,7]$  (Aufgabenteil 20 (b))

Verfeinerungsschritt

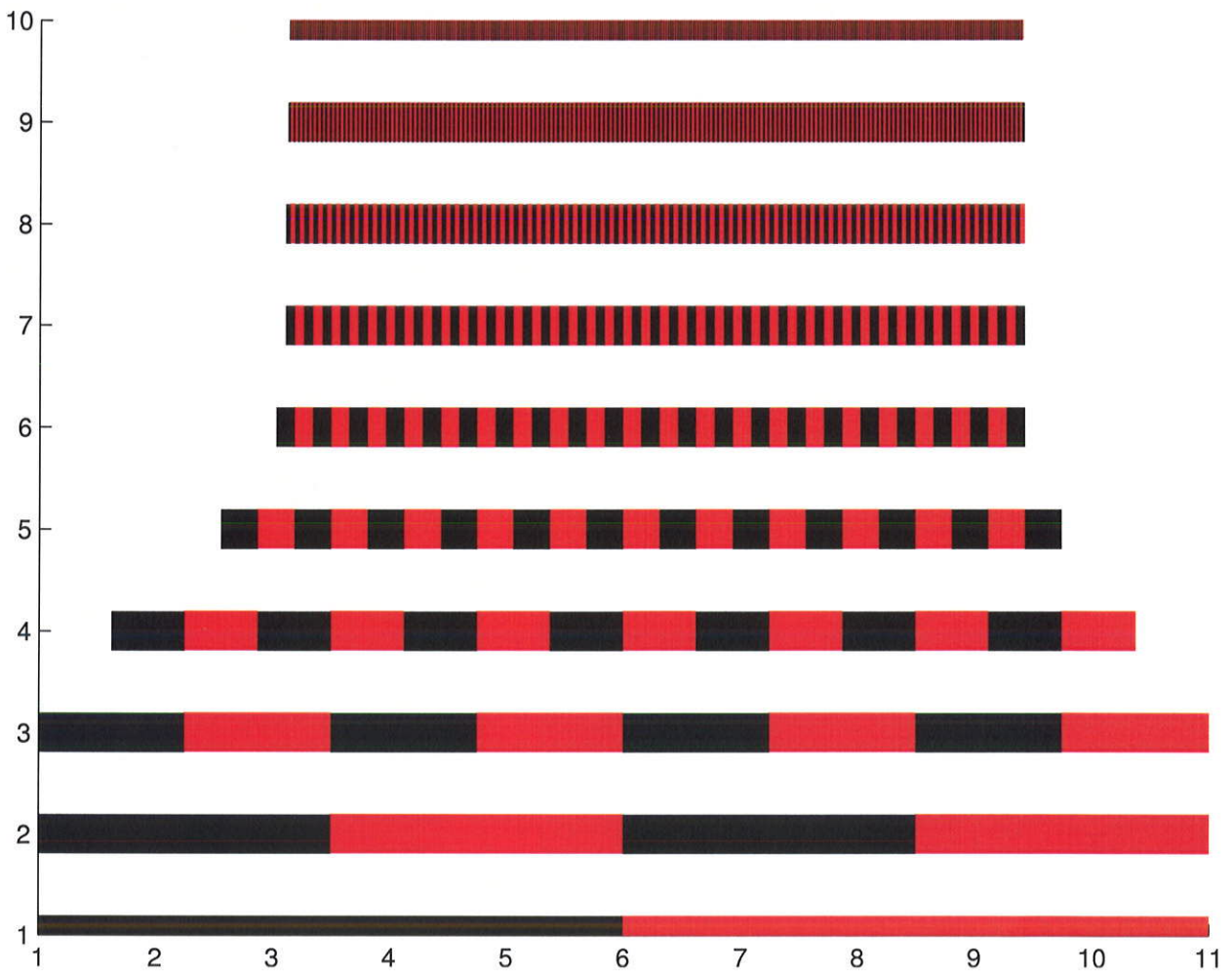


Abbildung 6 :  $Q_3 = [1, 11]$  (Aufgabenteil 20 ©)

u