# Übungen zur Vorlesung
# Numerik dynamischer Systeme
## Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 7
27.5.2011

**Abgabe: Freitag, 3.6.2011, 10:00 Uhr**

**Aufgabe 21:** Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in \mathcal{L}^2(0,1).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass diese Differentialgleichung die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\, k^2\pi^2}\, c_k^0 v_k(x), \quad v_k(x) = \sqrt{2}\, \sin(k\pi x)$$

besitzt.

(i) Diskutieren Sie durch (formale) Reihenentwicklung das implizite Euler-Verfahren.

Die Approximation $u^n(x)$ für $u(x, n\Delta t)$ ergibt sich für $n = 1, 2, \dots$ rekursiv aus der Anfangs-Randwertaufgabe

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1} - u^n\right) = u_{xx}^{n+1}, \quad u^{n+1}(0) = u^{n+1}(1) = 0, \quad u^0 := u_0.$$

Ausgehend von der Reihenentwicklung

$$u^0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 v_k, \quad c_k^0 = \langle u_0, v_k\rangle_2$$

bestimme man die Koeffizienten $c_k^n$, so dass $u^n$ die Darstellung

$$u^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n v_k$$

besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass man im Fall $u_0(x) = \min(x, 1-x)$ die Fourierkoeffizienten

$$c_k^0 = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{k^2\pi^2}(-1)^l & \text{, falls } k = 2l+1, \\ 0 & \text{, falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

erhält.

(iii) Zeichnen Sie für $x \in [0 : 0.01 : 1]$ und $K = 51$ die Partialsummen

$$u_K(x,t) = \sum_{k=1}^{K} e^{-tk^2\pi^2} c_k^0 v_k(x) \quad \text{für} \quad t \in [0 : 0.01 : 1]$$

und

$$u_K^n(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k^n v_k(x) \text{ für } \Delta t = \frac{1}{2},\ n \in \{0,1,2\}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta t = \frac{1}{100},\ n \in \{0,\dots,100\}.$$

(9 Punkte)

**Aufgabe 22:**

(A) Gegeben seien:

$$u_n(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right], \\ 1 - \frac{1}{2n} - 2n\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right), \\ 2(1-x), & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

und

$$u(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2(1-x), & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(A1) Berechnen Sie die erste (schwache) Ableitung von $u_n$, $n \in \mathbb{N}$ und von $u$.

(A2) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} u_n &\in \mathcal{C}^1(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u &\in \mathcal{C}(0,1), \\ u &\notin \mathcal{C}^1(0,1). \end{aligned}$$

(A3) Beweisen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der $H^1$-Norm gegen $u$ konvergiert, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{1,2} = 0.$$

(B) Konstruieren Sie eine Funktion

$$u \in \mathcal{C}^\infty(0,1) \cap H_0^2(0,1)$$

mit

$$u \notin H_0^3(0,1).$$

(9 Punkte)

# Aufgabe 21:



## Gegeben:

$$u_t = u_{xx} \quad , \; x \in ]0,1[ \, , \; t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \; t \geq 0 \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \; x \in [0,1] \quad , \; u_0 \in L^2(0,1)$$

Nach Vorlesung ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{+\lambda_k} \cdot v_k(x) \cdot \underbrace{\langle u_0, v_k \rangle_{L^2}}_{=: c_k^0} \quad , \; \lambda_k = -(k\pi)^2$$
$$v_k(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(k\pi x)$$

## Aufgaben:

(1): Diskutieren Sie durch (formale) Reihenentwicklung das implizite Euler-Verfahren (u.s.w. siehe Übungsblatt)

(2): Zeigen Sie, dass man im Fall $u_0(x) = \min(x, 1-x)$ die Fourierkoeffizienten

$$c_k^0 = \begin{cases} -\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_k} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}} & , \; k \text{ ungerade} \\ 0 & , \; k \text{ gerade} \end{cases} \quad , \; k \in \mathbb{N}$$

erhält.

(3): Zeichnen Sie die Partialsumme $u_K$ der exakten Lösung $u$, d.h.

$$u_K(x,t) = \sum_{k=1}^{K} e^{+\lambda_k} \cdot \langle u_0, v_k \rangle_{L^2} \cdot v_k(x)$$

für $x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$ und $K = 51$.

## Lösung: 1. Herleitung der zeitdiskreten Wärmeleitungsgleichung

zu (1): Betrachte die obige Wärmeleitungsgleichung. Wenden wir das implizite Euler-Verfahren auf die erste Gleichung an, so erhalten wir

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \Delta t \cdot u_{xx}^{n+1}(x) \quad , \; n \in \mathbb{N} \, , \; 0 < \Delta t < 1$$

Dabei ist der Startwert $u^0$ durch die dritte Gleichung gegeben

$$u^0(x) := u_0(x)$$

Hinzu kommen die fehlenden Randbedingungen

$$u^n(0) = u^n(1) = 0 \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

Insgesamt erhalten wir die zeitdiskrete Wärmeleitungsgleichung (eine spezielle Anfangs-Randwertaufgabe)

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \Delta t \cdot u_{xx}^{n+1}(x) \quad , \; x \in ]0,1[ \, , \; n \in \mathbb{N}$$
$$u^0(x) = u_0(x) \quad , \; x \in [0,1]$$
$$u^n(0) = u^n(1) = 0 \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

## 2. Lösung der zeitdiskreten Wärmeleitungsgleichung:

Es gilt:

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \Delta t \cdot u^{n+1}_{xx}(x)$$

$$\underset{\Delta t>0}{\iff} \frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1}(x) - u^n(x)\right) = u^{n+1}_{xx}(x) \qquad , n \in \mathbb{N}$$

Nun verwenden wir den

$$\boxed{\text{ANSATZ}: \quad u^n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n v_k(x)}$$

Für die Startfunktion $u^0(x)$ erhalten wir aus dem Ansatz

$$u^0(x) = u_0(x) \underset{u_0\in L^2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\langle u_0, v_k\rangle_{L^2}}_{=: c_k^0} \cdot v_k(x)$$

und aus der obigen Gleichung erhalten wir durch Einsetzen der Reihe

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1}(x)-u^n(x)\right) = \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{n+1}\cdot v_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n \cdot v_k(x)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^{n+1}-c_k^n}{\Delta t}\cdot v_k(x)$$

(!)

$$= u^{n+1}_{xx}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{n+1}\cdot v_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot c_k^{n+1} \cdot v_k(x)$$

Da die Reihen nur dann übereinstimmen, wenn ihre Koeffizienten dies tun, gilt

$$\frac{c_k^{n+1}-c_k^n}{\Delta t} = \lambda_k c_k^{n+1} \qquad \forall k\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\iff (1-\Delta t\cdot\lambda_k)\cdot c_k^{n+1} = c_k^n$$

$$\iff c_k^{n+1} = \frac{c_k^n}{(1-\Delta t\cdot\lambda_k)} = \frac{c_k^0}{(1-\Delta t\,\lambda_k)^{n+1}} \qquad \forall k\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

wobei $c_k^0 := \langle u_0, v_k\rangle_{L^2}$ aus der Startfunktion bekannt ist. Daraus erhalten wir die zeitdiskrete Lösung

$$\boxed{u^n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^0}{(1-\Delta t\,\lambda_k)^n}\cdot v_k(x)} \quad , x\in[0,1], n\in\mathbb{N}, 0<\Delta t<1$$

zu (2): Wegen $u_0 \in L^2(]0,1[,\mathbb{R})$ gilt

$$u_0(x) \underset{u_0\in L^2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\langle u_0, v_k\rangle_{L^2}}_{=: c_k^0}\cdot v_k(x)$$

Speziell für $u_0(x) := \min(x, 1-x) = \begin{cases} x & , x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-x, & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$ erhalten wir

$$c_k^0 = \langle u_0, v_k \rangle_{L^2}$$

$$= \int_0^1 u_0(x) \cdot v_k(x)\, dx = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 \min(x, 1-x) \cdot \sin(k\pi x)\, dx$$

$$= \sqrt{2} \cdot \Bigg( \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin(k\pi x)\, dx}_{= \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2} - \frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{2k\pi}} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cdot \sin(k\pi x)\, dx}_{= \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2} + \frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{2k\pi} - \frac{\sin(k\pi)}{(k\pi)^2}} \Bigg)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \Bigg( \frac{2 \sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2} - \underbrace{\frac{\sin(k\pi)}{(k\pi)^2}}_{= 0 \text{ (da } k \in \mathbb{N})} \Bigg)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}_{= \begin{cases} \sin(l\pi) = 0 & , k = 2l,\ k \text{ gerade} \\ \sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(l\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^l = (-1)^{\frac{k-1}{2}} & , k = 2l+1,\ k \text{ ungerade} \end{cases}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^2} \cdot \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_k} \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}} & , k \text{ ungerade} \end{cases} \quad , k \in \mathbb{N}$$

In diesem Fall ist die zeitdiskrete Lösung gegeben durch

$$u^n(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}\,(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\lambda_k \cdot (1 - \Delta t + \lambda_k)^n} \cdot v_k(x) \quad , x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N},\ 0 < \Delta t < 1.$$

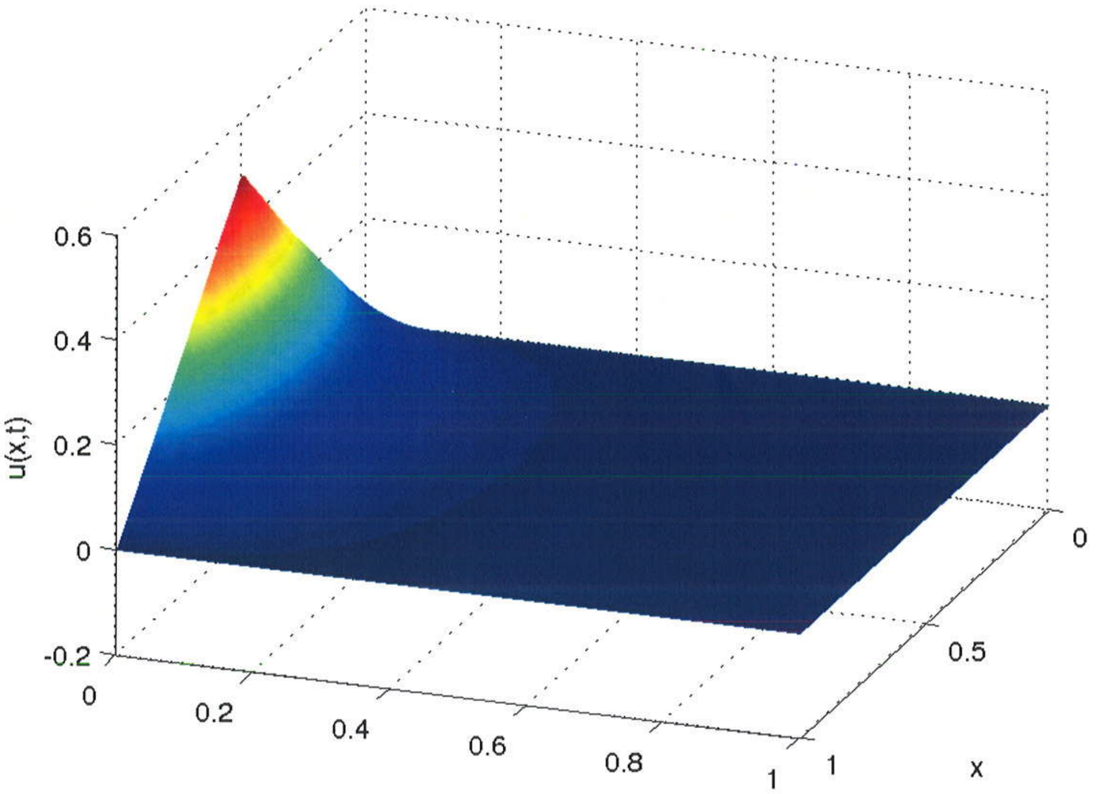
4

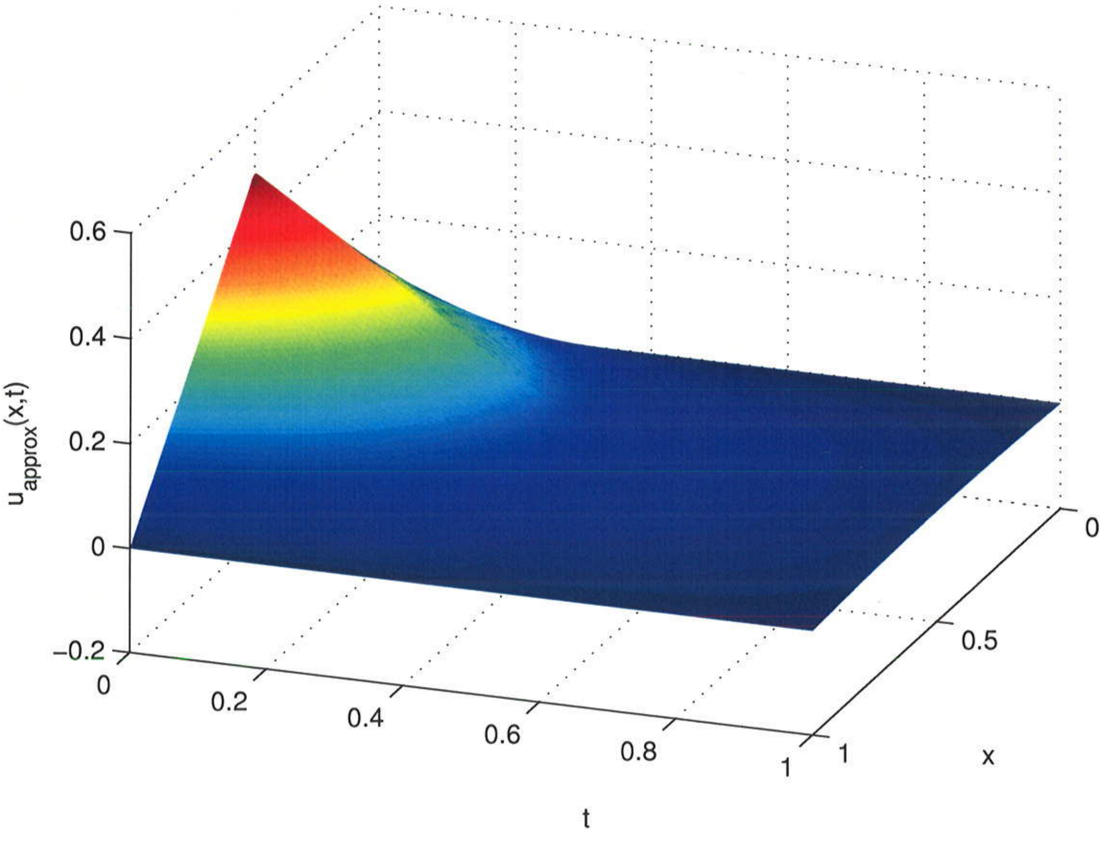
zu 3:

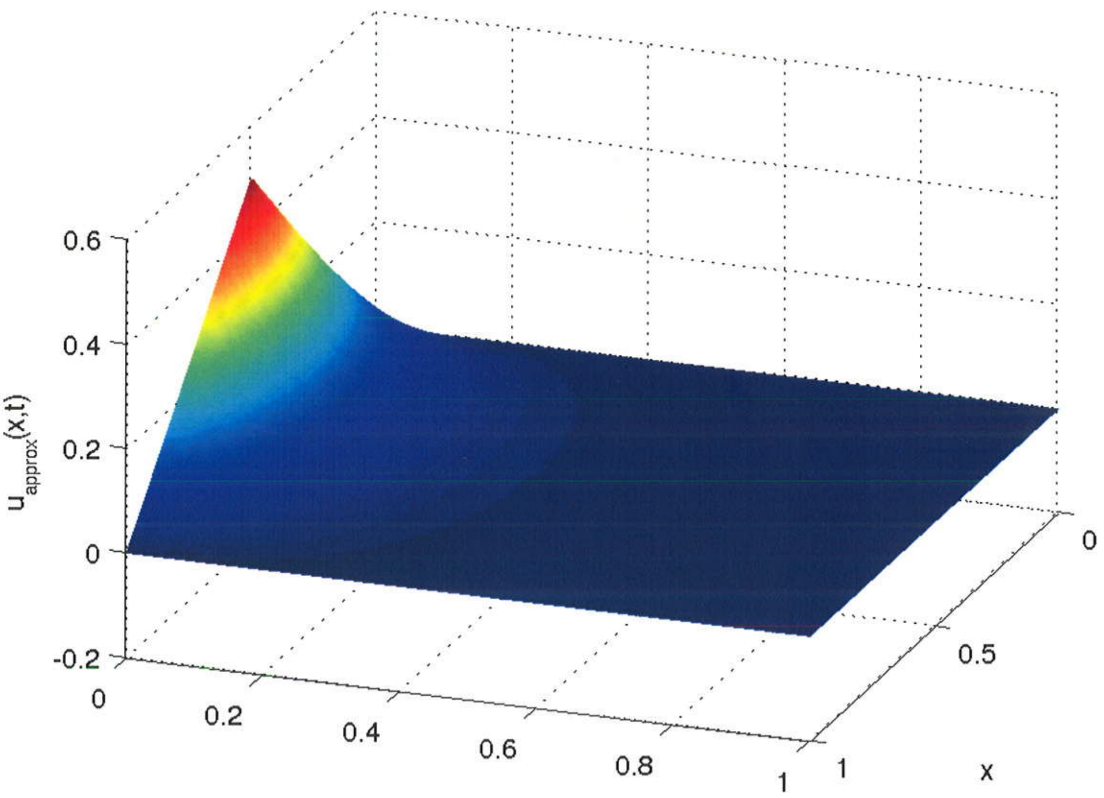
```
% ---------------------------
% | Plot der exakten Loesung |
% ---------------------------
deltat=0.01; % zeitliche Schrittweite
deltax=0.01; % raeumliche Schrittweite
K=51;          % Anzahl der Folgenglieder der Partialsumme

[X,T]=meshgrid(0:deltax:1,0:deltat:1);
U=zeros(size(X));

for i=0:length(0:deltax:1)-1
    for n=0:length(0:deltat:1)-1
        for k=1:K
            if mod(k,2)==1
                e=exp(-n*deltat*(k*pi)^2);
                ck0=2*sqrt(2)/(k^2*pi^2)*(-1)^((k-1)/2);
                vk=sqrt(2)*sin(k*pi*X(n+1,i+1));
                U(n+1,i+1)=U(n+1,i+1)+e*ck0*vk;
            end
        end
    end
end

figure
surf(X,T,U);
shading interp;
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u(x,t)');
view([110 30]);

% -------------------------
% | Plot der Approximation |
% -------------------------
deltat=0.5; % zeitliche Schrittweite
deltax=0.01; % raeumliche Schrittweite
K=51;       % Anzahl der Folgenglieder der Partialsumme

[X,T]=meshgrid(0:deltax:1,0:deltat:1);
Uapprox=zeros(size(X));

for i=0:length(0:deltax:1)-1
    for n=0:length(0:deltat:1)-1
        for k=1:K
            vk=sqrt(2)*sin(k*pi*X(n+1,i+1));
            if mod(k,2)==1
                ck0=2*sqrt(2)/(k^2*pi^2)*(-1)^((k-1)/2);
                ckn=ck0/(1+(k*pi)^2*deltat)^n;
                Uapprox(n+1,i+1)=Uapprox(n+1,i+1)+ckn*vk;
            end
        end
    end
end

figure
surf(X,T,Uapprox);
```

5

```
shading interp;
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u_{approx}(x,t)');
view([110 30]);

% -------------------------
% | Plot der Approximation |
% -------------------------
deltat=0.01; % zeitliche Schrittweite
deltax=0.01; % raeumliche Schrittweite
K=51;        % Anzahl der Folgenglieder der Partialsumme

[X,T]=meshgrid(0:deltax:1,0:deltat:1);
Uapprox=zeros(size(X));

for i=0:length(0:deltax:1)-1
    for n=0:length(0:deltat:1)-1
        for k=1:K
            vk=sqrt(2)*sin(k*pi*X(n+1,i+1));
            if mod(k,2)==1
                ck0=2*sqrt(2)/(k^2*pi^2)*(-1)^((k-1)/2);
                ckn=ck0/(1+(k*pi)^2*deltat)^n;
                Uapprox(n+1,i+1)=Uapprox(n+1,i+1)+ckn*vk;
            end
        end
    end
end

figure
surf(X,T,Uapprox);
shading interp;
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u_{approx}(x,t)');
view([110 30]);
```


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
u(x,t)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
x


0.6
0.4
0.2
0
−0.2
$u_{approx}(x,t)$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t
0
0.5
1
x


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$u_{approx}(x,t)$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
x

# Aufgabe 22:

**Gegeben:**

$$u_n(x) := \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}] \\ 1 - \frac{1}{2n} - 2n(x - \frac{1}{2})^2 & , x \in ]\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}[ \\ 2(1-x) & , x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

$$u(x) := \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Aufgaben:**

(1): Berechnen Sie die erste (schwache) Ableitung von $u_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $u$

(2): Zeigen Sie

- $u_n \in C^1(]0,1[, \mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $u \in C([0,1], \mathbb{R})$
- $u \notin C^1(]0,1[, \mathbb{R})$

(3): Beweisen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der $H^1$-Norm gegen $u$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}} = 0$$

(4): Konstruieren Sie eine Funktion $u \in C^\infty(]0,1[, \mathbb{R}) \cap H_0^2(]0,1[, \mathbb{R})$ mit $u \notin H_0^3(]0,1[, \mathbb{R})$

**Lösung:**

zu (1): • zu $u$:

Betrachte

$$u : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } u(x) := \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

und setze

$$v : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } v(x) := \begin{cases} 2 & , x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -2 & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $v$ die schwache (verallgemeinerte) Ableitung von $u$ ist. Sei $\varphi \in C_0^\infty([0,1], \mathbb{R})$ eine beliebige Testfunktion, dann gilt

$$\int_0^1 u(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = \left[\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1\right] u(x) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot \varphi'(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-x) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[2x\cdot\varphi(x)\right]_0^{\frac12} - \int_0^{\frac12} (2x)'\cdot\varphi(x)\,dx$$

$$+ \left[2(1-x)\cdot\varphi(x)\right]_{\frac12}^1 - \int_{\frac12}^1 \left(2(1-x)\right)'\cdot\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\varphi(\tfrac12) - \underbrace{\varphi(0)}_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(0,1)\\=0}} - \varphi(\tfrac12)}_{=0} + \underbrace{2\cdot 0\cdot \overbrace{\varphi(1)}^{\substack{\varphi\in C_0^\infty(0,1)\\=0}}}_{=0}$$

$$- \left( \int_0^{\frac12} \underbrace{2}_{=v(x),\ x\in[0,\frac12]} \cdot\varphi(x)\,dx + \int_{\frac12}^1 \underbrace{-2}_{=v(x),\ x\in[\frac12,1]}\cdot\varphi(x)\,dx \right)$$

$$= -\int_0^1 v(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

Damit ist $v$ die schwache Ableitung von $u$, d.h. $u\in H^1(0,1)$. Da $u(0)=u(1)=0$ (d.h. $u$ ist auf dem Rand $0$) folgt sogar $u\in H_0^1(0,1)$.

• zu $u_n$:

Betrachte für $n\in\mathbb{N}$

$$u_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mit } u_n(x) := \begin{cases} 2x &, x\in[0,\frac12-\frac{1}{2n}] \\ 1-\frac{1}{2n}-2n(x-\frac12)^2 &, x\in[\frac12-\frac{1}{2n},\frac12+\frac{1}{2n}] \\ 2(1-x) &, x\in[\frac12+\frac{1}{2n},1] \end{cases}$$

und setze

$$v_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mit } v_n(x) := \begin{cases} 2 &, x\in[0,\frac12-\frac{1}{2n}] \\ -4n(x-\frac12) &, x\in[\frac12-\frac{1}{2n},\frac12+\frac{1}{2n}] \\ -2 &, x\in[\frac12+\frac{1}{2n},1] \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $v_n$ die schwache (verallgemeinerte) Ableitung von $u_n$ ist. Sei $\varphi\in C_0^\infty([0,1],\mathbb{R})$ eine beliebige Testfunktion, dann gilt:

$$\int_0^1 u_n(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \left[\int_0^{\frac12-\frac{1}{2n}} + \int_{\frac12-\frac{1}{2n}}^{\frac12+\frac{1}{2n}} + \int_{\frac12+\frac{1}{2n}}^1\right] u_n(x)\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac12-\frac{1}{2n}} 2x\cdot\varphi'(x)\,dx + \int_{\frac12-\frac{1}{2n}}^{\frac12+\frac{1}{2n}} \left(1-\tfrac{1}{2n}-2n(x-\tfrac12)^2\right)\cdot\varphi'(x)\,dx + \int_{\frac12+\frac{1}{2n}}^1 2(1-x)\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[2x\cdot\varphi(x)\right]_0^{\frac12-\frac{1}{2n}} - \int_0^{\frac12-\frac{1}{2n}} (2x)'\cdot\varphi(x)\,dx$$

$$+ \left[\left(1-\tfrac{1}{2n}-2n(x-\tfrac12)^2\right)\cdot\varphi(x)\right]_{\frac12-\frac{1}{2n}}^{\frac12+\frac{1}{2n}} - \int_{\frac12-\frac{1}{2n}}^{\frac12+\frac{1}{2n}} \left(1-\tfrac{1}{2n}-2n(x-\tfrac12)^2\right)'\cdot\varphi(x)\,dx$$

$$+ \left[2(1-x)\cdot\varphi(x)\right]_{\frac12+\frac{1}{2n}}^1 - \int_{\frac12+\frac{1}{2n}}^1 \left(2(1-x)\right)'\cdot\varphi(x)\,dx$$

$=$ nächste Seite

$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)} - \underbrace{2\cdot 0\cdot \underbrace{\varphi(0)}_{\substack{=0\\ \varphi\in C_0^\infty(0,1)}}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)} - \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)}_{=0}$$

$$+ \underbrace{2\cdot 0\cdot \underbrace{\varphi(1)}_{\substack{=0\\ \varphi\in C_0^\infty(0,1)}}}_{=0} - \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)}_{=0}$$

$$-\left(\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} \underbrace{2}_{\substack{=:v_n(x),\\ x\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}]}}\cdot\varphi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \underbrace{-4n\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{\substack{=:v_n(x),\\ x\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}]}}\cdot\varphi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{1} \underbrace{-2}_{\substack{=:v_n(x),\\ x\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},1]}}\cdot\varphi(x)\,dx\right)$$

$$= -\int_0^1 v_n(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

Damit ist $v_n$ die schwache Ableitung von $u_n$, d.h. $u_n\in H^1(0,1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Da $u_n(0)=u_n(1)=0$ (d.h. $u_n$ ist auf dem Rand 0) folgt sogar $u_n\in H_0^1(0,1)$.

Zu ②: MERKE: Ist eine Funktion stark differenzierbar (d.h. differenzierbar im klassischen $C^1$-Sinne), so ist sie auch schwach differenzierbar. In diesem Fall stimmen die starke und schwache Ableitung überein.

- Zu $u_n\in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ $\forall n\in\mathbb{N}$:

  i) Zunächst ist $u_n$ stetig (d.h. $u_n\in C([0,1],\mathbb{R})$): Die Stetigkeit in $[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}[$, $]\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}[$ und $]\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},1]$ ist klar, da die Funktion in diesen Abschnitten polynomial ist. Zu überprüfen bleiben die „Nahtstellen":

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\\ 0\le x<\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}} 2x = 1-\frac{1}{n} = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}} 1-\frac{1}{2n}-2n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}} 1-\frac{1}{2n}-2n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{n} = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}<x\le 1}} 2(1-x)$$

  ii) Offenbar ist $u_n$ auf den drei Abschnitten differenzierbar (vgl. $v_n$). Damit $u_n$ stark differenzierbar ist, muss die Stetigkeit von $Du_n:=v_n$ an den Nahtstellen überprüft werden:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\\ 0\le x<\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}} 2 = 2 = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}} -4n\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}} -4n\left(x-\frac{1}{2}\right) = -2 = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}<x\le 1}} -2$$

Damit ist $u_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

• zu $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ und $u \notin C^1(]0,1[,\mathbb{R})$:

i) Zunächst ist auch die Funktion $u$ stetig (d.h. $u \in C([0,1],\mathbb{R})$): Die Stetigkeit in $[0,\frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2},1]$ ist klar, da die Funktion in diesen Abschnitten polynomial ist. Zu überprüfen bleibt die Nahtstelle:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\0\le x<\frac{1}{2}}} 2x = 1 = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}<x\le 1}} 2(1-x)$$

ii) Offenbar ist $u$ in den Abschitten differenzierbar und deren Ableitung ist dort wieder stetig (d.h. $u \in C^1(]0,\frac{1}{2}[,\mathbb{R})$, $u \in C^1(]\frac{1}{2},1[,\mathbb{R})$) (vgl. V). Damit $u \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ gilt, muss die schwache Ableitung $Du := v$ hinsichtlich ihrer Stetigkeit an der Nahtstelle untersucht werden:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\0\le x<\frac{1}{2}}} 2 = 2 \neq -2 = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}<x\le 1}} -2$$

Damit ist $u$ zwar schwach differenzierbar (d.h. $u \in H^1(0,1)$), jedoch nicht stark differenzierbar (d.h. $u \notin C^1(0,1)$).

zu (3): Es gilt

$$\|u_n-u\|^2_{W^{1,2}} = \sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha(u_n-u)\|^2_{L^2=W^{0,2}}$$

$$= \|u_n-u\|^2_{L^2} + \|Du_n - Du\|^2_{L^2}$$

$$= \frac{1}{20n^3} + \frac{4}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Hierbei erhalten wir die beiden $L^2$-Normen aus

$$\|u_n-u\|^2_{L^2} = \int_0^1 (u_n(x)-u(x))^2\,dx$$

$$= \left[\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{1}\right](u_n(x)-u(x))^2\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} \underbrace{(2x-2x)^2}_{=0}\,dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1}{2n}-2n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2x\right)^2 dx}_{=\frac{1}{40n^3}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \left(1-\frac{1}{2n}-2n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2(1-x)\right)^2 dx}_{=\frac{1}{40n^3}} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{1} \underbrace{(2(1-x)-2(1-x))^2}_{=0}\,dx$$

$$= \frac{1}{40n^3} + \frac{1}{40n^3} = \frac{1}{20n^3}$$

$$\|Du_n - Du\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (Du_n(x) - Du(x))^2\,dx$$

$$= \left[\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{1}\right](Du_n(x) - Du(x))^2\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} \underbrace{(2-2)^2}_{=0}\,dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} (-4n(x-\tfrac{1}{2})-2)^2\,dx}_{=\frac{2}{3n}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} (-4n(x-\tfrac{1}{2})-(-2))^2\,dx}_{=\frac{2}{3n}} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{1} \underbrace{(-2-(-2))^2}_{=0}\,dx$$

$$= \frac{2}{3n} + \frac{2}{3n} = \frac{4}{3n}$$

Damit haben wir die Aussage gezeigt.

zu ④: Erinnerung:

$$H_0^K(\Omega) := \overline{(C_0^\infty(\Omega))}^{\|.\|_{H^K = W^{K,2}}}, \quad K \in \mathbb{N}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

und es gilt für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$:

$$u \in H_0^K(\Omega) \iff TD^\alpha u = 0 \quad \forall |\alpha| \leq K-1 \quad (T \text{ trace operator})$$

Betrachte $\Omega = ]0,1[$ und

$$u : ]0,1[ \to \mathbb{R} \text{ mit } u(x) := (x(1-x))^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

Hierbei gilt offenbar $u \in C^\infty(]0,1[, \mathbb{R})$. Für die Ableitungen

$$D^1u(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$
$$D^2u(x) = 12x^2 - 12x + 2$$
$$D^3u(x) = 24x - 12$$

gilt

$$u(0) = u(1) = 0$$
$$D^1u(0) = D^1u(1) = 0$$
$$D^2u(0) = 2 \neq 0, \quad D^2u(1) = 2 \neq 0$$

Damit gilt $u \in C^\infty(]0,1[,\mathbb{R}) \cap H_0^2(]0,1[,\mathbb{R})$. Jedoch gilt $u \notin H_0^3(]0,1[,\mathbb{R})$ denn $D^2u(0) \neq 0$ und $D^2u(1) \neq 0$.