# Übungen zur Vorlesung
# Numerik dynamischer Systeme
## Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 8
3.6.2011

**Abgabe: Freitag, 10.6.2011, 10:00 Uhr**

**Aufgabe 23:**

(a) Analog zu dem in der Vorlesung diskutierten Fall der Dirichletrandbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

definiere man ein geeignetes dynamisches System

$$\left(\mathcal{L}^2(0,1), \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$$

zu der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} \text{ in } (0,1)\times\mathbb{R}_+,\\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x\in[0,1],\\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie (unter der Annahme, dass Funktionen in $\mathcal{L}^2(0,1)$ sich nach den Eigenfunktionen entwickeln lassen), dass das in Teil (a) definierte dynamische System stetig ist.

(c) Beweisen Sie für alle $t > 0$ die Identität

$$\|\varphi^t - I\|_2 = \sup_{\|u\|_2\le 1} \|\varphi^t(u) - u\|_2 = 1.$$

(6 Punkte)

**Aufgabe 24:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = u^2 - 1. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichte von (1).

Berechnen Sie – in Abhängigkeit von der Schrittweite $\Delta t$ – die Gleichgewichte von Approximationen der Differentialgleichung (1) mit den folgenden Einschrittverfahren (vgl. Numerik II-Skript):

(b) explizites Euler-Verfahren,

(c) implizites Euler-Verfahren,

(d) Methode von Heun,

(e) verbessertes Polygonzugverfahren.

(6 Punkte)

**Aufgabe 25:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = u(1-u)(1+u). \tag{2}$$

Es sollen die Gleichgewichte der Approximation von (2) mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, vgl. Numerik II-Skript, untersucht werden.

Schreiben Sie hierzu ein Programm, dass sämtliche reelle Gleichgewichte für die Schrittweiten

$$\Delta t \in \left\{10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}\right\}$$

ausgibt.

(6 Punkte)

# Aufgabe 23:

## Gegeben:

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} &&, (t,x) \in ]0,1[ \times \mathbb{R}_+ && \text{(Wärmeleitungsgleichung)}\\
&u(x,0) = u_0(x) &&, x \in [0,1] && \text{(Anfangsbedingung)}\\
&u(0,t) = 0 &&, t \in \mathbb{R}_+ && \\
&u_x(1,t) = 0 &&, t \in \mathbb{R}_+ && \Big\} \text{(Randbedingung)}
\end{aligned}$$

**Aufgabe:** (a): Definieren Sie ein geeignetes dynamisches System $(L^2(0,1), \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$.

(b): Zeigen Sie, dass das dynamische System aus (a) stetig ist.

(c): Zeigen Sie

$$\|\varphi^t - I\|_{L^2} = \sup_{\|u\|_{L^2}\le 1} \|\varphi^t(u) - u\|_{L^2} = 1$$

## Lösung:

**zu (a):** • (Operatorform):

$$\begin{aligned}
&u_t = Au \quad , u \in X := L^2(0,1) && \text{(Wärmeleitungsgleichung)}\\
&u(0) = u_0 \in X && \text{(Anfangsbedingung)}
\end{aligned}$$

(Randbedingungen) stecken im Def. bereich von A

mit

$$A: L^2(0,1) \supset D(A) := H^2(0,1) \cap \boxed{\overline{C_0^\infty(]0,1])}^{\|\cdot\|_{H^1}}} \longrightarrow L^2(0,1)$$
$$u \longmapsto Au := u_{xx}$$

wobei

$$C_0^\infty(]0,1]) := \{u \in C^\infty(]0,1]) \mid \operatorname{supp}(u) \subset ]0,1]\}$$

• (Eigenwertproblem): Betrachte das Eigenwertproblem

$$V_k''(x) = AV_k(x) = \lambda_k V_k(x) \qquad , x \in ]0,1[, k \in \mathbb{Z}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &V_k(0) = 0\\ &\tfrac{\partial}{\partial x} V_k(1) = 0 \end{aligned}\right\} \text{(Randbedingungen)}$$

Allgemeiner: Betrachte $\Omega = ]a,b[$ und $V_k(a) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} V_k(b) = 0$.

$$\boxed{\text{ANSATZ}_{\text{in 1D}}: V_k(x) = \alpha \cdot \sin\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-a}{b-a}\right) + \beta \cdot \cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-a}{b-a}\right)}$$

①: (Randbedingung überprüfen)

$$\bullet\; 0 \overset{!}{=} V_k(a) = \alpha \cdot \underbrace{\sin\big(\lambda^{\frac12} \underbrace{\tfrac{a-a}{b-a}}_{=0}\big)}_{=0} + \beta \cdot \underbrace{\cos\big(\lambda^{\frac12} \cdot \underbrace{\tfrac{a-a}{b-a}}_{=0}\big)}_{=1} = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow V_k(x) = \alpha \cdot \sin\left(\lambda^{\frac12} \cdot \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$\bullet\; 0 \overset{!}{=} \left[\frac{\partial}{\partial x} V_k(x)\right]_{x=b} = \alpha \cdot \frac{\lambda^{\frac12}}{b-a} \cdot \cos\big(\underbrace{\lambda^{\frac12} \cdot \tfrac{b-a}{b-a}}_{=\lambda^{\frac12}}\big)$$

$$\underset{\lambda\neq 0,\, \alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow} \cos(\lambda^{\frac12}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^{\frac12} = (k + \tfrac12)\pi$$

($\alpha$ und $\beta$ dürfen nicht beide 0 sein, sonst $V_k \equiv 0$)

$$\Rightarrow V_k(x) = \alpha \cdot \sin\left((k+\tfrac12)\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$$

② : (Überprüfe $v_k'' = \lambda_k v_k$)

$$v_k''(x) = \underbrace{-\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{b-a}\right)^2}_{=:\lambda_k} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \sin\left((k+\tfrac{1}{2})\pi \cdot \frac{x-a}{b-a}\right)}_{=v_k(x)}$$

$$= \lambda_k \cdot v_k(x)$$

③ : (Normierung $\|v_k\|_{L^2} = 1$)

Wähle $\alpha$ derart, dass $\|v_k\|_{L^2} = 1$ gilt:

$$\|v_k\|_{L^2}^2 = \int_a^b |v_k(x)|^2 dx = \alpha^2 \cdot \int_a^b \sin^2\left((k+\tfrac{1}{2})\pi \cdot \frac{x-a}{b-a}\right) dx$$

$$= \alpha^2 \cdot \frac{(b-a)}{2} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{2}{b-a} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Insbesondere gilt für dieses $\alpha$:

$$\langle v_k, v_l \rangle_{L^2} = \delta_{kl}$$

Wir erhalten

$$\lambda_k = -\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{b-a}\right)^2 \quad \text{(Eigenwerte von A)}$$

$$v_k(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left((k+\tfrac{1}{2})\pi \cdot \frac{x-a}{b-a}\right) \quad \text{(Eigenfunktionen von A)}$$

Speziell für $a=0$ und $b=1$ erhalten wir

$$\lambda_k = -(k+\tfrac{1}{2})^2\pi^2$$

$$v_k(x) = \sqrt{2} \cdot \sin((k+\tfrac{1}{2})\pi x)$$

• (Halbgruppe):

$$\varphi^t(u_0) := e^{tA} u_0 \underset{\substack{\uparrow \\ u_0 \in L^2(0,1) \\ \text{Satz 8.3.}}}{=} e^{tA}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\langle u_0, v_k \rangle_{L^2}}^{=:c_k} \cdot v_k\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ e^{tA}\text{ linear}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, v_k \rangle_{L^2} \cdot e^{tA} v_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spektralsatz}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \cdot \langle u_0, v_k \rangle_{L^2} \cdot v_k$$

$v_k$ EF von A $\Rightarrow$ $v_k$ EF von $e^{tA}$

infini. Erzeuger ↗ ↖ $C^0$-Halbgruppe

(d.h. $e^{tA} v_k = e^{t\lambda_k} v_k$)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \cdot \langle u_0, \sqrt{2} \cdot \sin((k+\tfrac{1}{2})\pi \cdot) \rangle_{L^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin((k+\tfrac{1}{2})\pi \cdot)$$

Damit ist $(L^2(0,1), \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein dynamisches System.

Insbesondere ist $\varphi^t$ ein linearer Operator $\forall t \geq 0$.

Zu (b): Idee: Zeige Eigenschaften einer $C^0$-Halbgruppe. Dann folgt aus Lemma 8.1, dass $(L^2(0,1), \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein stetiges DS ist.

• (Stetigkeit in $u_0$):

$$\|\varphi^t(u_0)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot \underbrace{e^{2t\lambda_k}}_{\leq e^{2t\lambda_1} \text{ (da } \lambda_k < 0,\ t \geq 0)} \leq e^{2t\lambda_1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \overset{\substack{\text{Parsevalsche} \\ \text{Gleichung} \\ \downarrow}}{=} e^{2t\lambda_1} \|u_0\|_{L^2}^2 \quad \forall u_0 \in L^2$$

Damit ist $\varphi^t$ beschränkt & somit stetig $\forall t \geq 0$. $\Rightarrow \varphi^t \in L[L^2(0,1)]$ $\forall t \geq 0$

• (Stetigkeit in $t$): z.z.: $\forall u \in L^2(0,1)$: $\varphi^t(u)$ ist stetig bei $t=0$.

$$\|\varphi^h(u_0) - u_0\|_{L^2}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ u_0 \in L^2 \\ \varphi^h(u_0) \text{ siehe (a)}}}{=} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{t\lambda_k} \cdot v_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot v_k \right\|_{L^2}^2$$

$$= \| \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{c_k (e^{t\lambda_k} - 1)}_{=: \tilde{c}_k} v_k \|_{L^2}^2$$

$$\underset{\text{Parsevalsche Gleichung}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot (e^{t\lambda_k} - 1)^2$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ (diese gilt wegen $u_0 \in L^2$, d.h. $\infty > \|u_0\|_{L^2} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$) folgt

$$(1): \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists K = K(\varepsilon) > 0 : \sum_{k=K(\varepsilon)+1} c_k^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Weiter existiert ein $h(\varepsilon) > 0$ mit

$$(2): \quad 2\|u_0\|_{L^2}^2 \cdot \left(e^{h\lambda_k} - 1\right)^2 \leq \varepsilon \quad \forall k = 1, \dots, K(\varepsilon) \quad \forall_{0<} h \leq h(\varepsilon)$$

Zusammen erhalten wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $0 < h \leq h(\varepsilon)$:

$$\|\varphi^h(u_0) - u_0\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} c_k^2 \underbrace{\left(e^{h\lambda_k} - 1\right)^2}_{\overset{(2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2\|u_0\|_{L^2}^2}} + \sum_{k=K(\varepsilon)+1}^{\infty} c_k^2 \underbrace{\left(e^{h\lambda_k} - 1\right)^2}_{< 1 \text{ (da } \lambda_k < 0)}$$

$\|u_0\|_{L^2} \neq 0$ (für $\|u_0\|_{L^2} = 0$ ist die Stetigkeit in $t=0$ ohnehin klar)

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\|u_0\|_{L^2}^2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} c_k^2}_{\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \|u_0\|_{L^2}^2} + \underbrace{\sum_{k=K(\varepsilon)+1}^{\infty} c_k^2}_{\overset{(1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\varepsilon \cdot \cancel{\|u_0\|_{L^2}^2}}{2 \cdot \cancel{\|u_0\|_{L^2}^2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit ist $\varphi^t(u)$ für jedes $u_0 \in L^2(0,1)$ stetig bei $t=0$ und somit per Definitio[n] eine $C^0$-Halbgruppe. Nach Lemma 8.1 ist $(L^2(0,1), \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein stetiges dynamisches System.

<u>Zu (c):</u> $\forall t > 0: \quad \|\varphi^t - I\|_{L^2} = \sup_{\|u\|_{L^2} \leq 1} \|\varphi^t(u) - u\|_{L^2} = 1$

- „$\leq$":

$$\|\varphi^t(u) - u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \underbrace{\left(e^{t\lambda_k} - 1\right)^2}_{\leq 1 \text{ da } t > 0 \text{ und } \lambda_k < 0} \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \|u_0\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|\varphi^t - I\|_{L^2} = \sup_{\|u\|_{L^2} \leq 1} \underbrace{\|\varphi^t(u) - u\|_{L^2}}_{\leq \|u\|_{L^2}} \leq \sup_{\|u\|_{L^2} \leq 1} \|u\|_{L^2} = 1 \quad \forall t > 0$$

- „$\geq$": Zeige: $\|\varphi^t - I\|_{L^2} \geq 1 - \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$.

Wegen $\lambda_L \to -\infty$ für $L \to \infty$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists L > 0 : \quad \left(e^{t\lambda_L} - 1\right)^2 \geq (1 - \varepsilon)^2$$

Setze $\bar{u} = v_L$ ($L$'te Eigenfunktion), dann folgt $\|v_L\|_{L^2} = 1$ (vgl. Normier-ungsbedingung der Eigenfunktionen) und

$$\|\varphi^t(\bar{u}) - \bar{u}\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\langle v_L, v_k \rangle_{L^2}}_{= \delta_{Lk}} \cdot (e^{t\lambda_k} - 1)^2 = (e^{t\lambda_L} - 1)^2 \geq (1-\varepsilon)^2$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt $\|\varphi^t - I\|_{L^2} \geq 1$

# Aufgabe 24:

## Gegeben:

$$u' = u^2 - 1 =: f(u)$$

## Aufgabe:

(a): Bestimmen Sie die Gleichgewichte.

(b): Bestimmen Sie die Gleichgewichte des expliziten Euler-Verfahrens

(c): Bestimmen Sie die Gleichgewichte des impliziten Euler-Verfahrens.

(d): Bestimmen Sie die Gleichgewichte des Heun-Verfahrens.

(e): Bestimmen Sie die Gleichgewichte des verbesserten Polygonzug-Verfahrens.

## Lösung:

zu (a): Die Gleichgewichte erhalten wir aus

$$0 \overset{!}{=} u' = f(u) = u^2 - 1 = (u+1)\cdot(u-1)$$

Bedingung für Gleichgewicht (der kontinuierlichen Gleichung) „$0 = u'$"

$$\Rightarrow u = \pm 1.$$

zu (b): (Explizites Euler-Verfahren).

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Butcher tableau

Das explizite Eulerverfahren ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta t \cdot f(t_n, u_n) \\ &= u_n + \Delta t \cdot (u_n^2 - 1) \end{aligned}$$

Die Gleichgewichte erhalten wir aus

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot (u_n^2 - 1)$$

Bedingung für Gleichgewicht. (der zeitdiskreten Gleichung) „$u_{n+1} = u_n$"

$$\Rightarrow 0 = \Delta t (u_n^2 - 1) \overset{\Delta t > 0}{\Longrightarrow} 0 = u_n^2 - 1 = (u_n + 1)(u_n - 1) \Rightarrow u_n = \pm 1 \ \forall \Delta t > 0$$

zu (c): (Implizites Euler-Verfahren).

Das implizite Euler-Verfahren ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta t \cdot f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ &= u_n + \Delta t \cdot (u_{n+1}^2 - 1) \end{aligned}$$

Die Gleichgewichte erhalten wir nun aus

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot (u_{n+1}^2 - 1) \overset{!}{=} u_n + \Delta t \cdot (u_n^2 - 1)$$

Bedingung für Gleichgewicht (der zeitdiskreten Gleichung) „$u_{n+1} = u_n$"

$$\Rightarrow 0 = \Delta t \cdot (u_n^2 - 1) \overset{\Delta t > 0}{\Longrightarrow} 0 = u_n^2 - 1 = (u_n + 1)(u_n - 1) \Rightarrow u_n = \pm 1 \ \forall \Delta t > 0$$

zu (d): (Heun-Verfahren)

$$\begin{array}{c|cc} c_1=0 & 0_{a_{11}} & 0_{a_{12}} \\ c_2=1 & 1_{a_{21}} & 0_{a_{22}} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \shortparallel & \shortparallel \\ & b_1 & b_2 \end{array}$$

VORBEMERKUNG: (Herleitung des Heun-Verfahrens)

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{2} \underbrace{b_j}_{=\frac{1}{2},\ j=1,2} K_j$$
$$= u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (K_1 + K_2)$$

$$K_j := f\left(t_n + \Delta t \cdot c_j,\ u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{2} a_{jl} K_l\right)$$
$$= u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big( f\big(t_n + \Delta t \cdot \underbrace{c_1}_{=0},\ u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{2} \overbrace{a_{1l}}^{=0,\ l=1,2} K_l\big)$$
$$+ f\big(t_n + \Delta t \cdot \underbrace{c_2}_{=1},\ u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{2} \underbrace{a_{2l}}_{=\begin{cases}1, & l=1\\ 0, & l=2\end{cases}} K_l\big)\Big)$$
$$= u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big( f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + \Delta t \cdot f(t_n, u_n))\Big)$$

Zurück zur Aufgabe: Das Heun-Verfahren ist gegeben durch

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big( f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + \Delta t \cdot f(t_n, u_n))\Big)$$
$$= u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big( (u_n^2 - 1) + \big((u_n + \Delta t \cdot (u_n^2 - 1))^2 - 1\big)\Big)$$

Die Gleichgewichte erhalten wir nun aus

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \Big( (u_n^2 - 1) + \big((u_n + \Delta t \cdot (u_n^2 - 1))^2 - 1\big)\Big)$$

Bedingung für Gleichgewichte (der zeitdiskreten Gleichung) „$u_{n+1} = u_n$"

$$\Rightarrow 0 = \tfrac{1}{2}(\Delta t) \cdot \Big( (u_n^2 - 1) + \big((u_n + \Delta t \cdot (u_n^2 - 1))^2 - 1\big)\Big)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot (\Delta t) \cdot \Big( u_n^2 - 1 + u_n^2 + 2\Delta t\, u_n^3 - 2\Delta t\, u_n + (\Delta t)^2 u_n^4 - 2(\Delta t)^2 u_n^2 + (\Delta t)^2 - 1\Big)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\Delta t)^3 u_n^4 + (\Delta t)^2 u_n^3 + (\Delta t - (\Delta t)^3) u_n^2 + (1 - (\Delta t)^2) u_n + \left(\tfrac{1}{2}(\Delta t)^3 - \Delta t\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\Delta t) \cdot (u_n + 1) \cdot (u_n - 1) \cdot \left(u_n - \frac{-1 + \sqrt{(\Delta t)^2 - 1}}{\Delta t}\right) \cdot \left(u_n - \frac{-1 - \sqrt{(\Delta t)^2 - 1}}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow u = \pm 1,\ \underbrace{\frac{-1 \pm \sqrt{(\Delta t)^2 - 1}}{\Delta t}}_{\to \infty \text{ für } \Delta t \to 0,\ \in \begin{cases}\mathbb{C}, & 0 < \Delta t < 1\\ \mathbb{R}, & \Delta t \geq 1\end{cases}} \qquad \forall \Delta t > 0$$

zu (e): (Verbessertes Polygonzugverfahren)

$$\begin{array}{c|cc} c_1=0 & 0_{a_{11}} & 0_{a_{12}} \\ c_2=\frac{1}{2} & \frac{1}{2}_{a_{21}} & 0_{a_{22}} \\ \hline & 0 & 1 \\ & \shortparallel & \shortparallel \\ & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{2} \underbrace{b_j}_{=\begin{cases}0; & j=1\\ 1; & j=2\end{cases}} K_j$$
$$= u_n + \Delta t \cdot K_2$$
$$= u_n + \Delta t \cdot f\big(t_n + \Delta t \cdot \underbrace{c_2}_{=\frac{1}{2}},\ u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{2} \underbrace{a_{2l}}_{=\begin{cases}\frac{1}{2}, & l=1\\ 0, & l=2\end{cases}} K_l\big)$$
$$= u_n + \Delta t \cdot f\left(t_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2},\ u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} K_1\right)$$
$$= u_n + \Delta t \cdot f\Big(t_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2},\ u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot f\big(t_n + \Delta t \cdot \underbrace{c_1}_{=0},\ u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{2} \underbrace{a_{1l}}_{=0} K_l\big)\Big)$$
$$= u_n + \Delta t \cdot f\left(t_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2},\ u_n + \Delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot f(t_n, u_n)\right)$$

$$= u_n + \Delta t \cdot \left( \left(u_n + \tfrac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (u_n^2 - 1)\right)^2 - 1 \right)$$

$$= u_n + \Delta t \cdot \left( \tfrac{1}{4}(\Delta t)^2 u_n^4 + \Delta t \cdot u_n^3 + \left(1 - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2\right) u_n^2 - (\Delta t) u_n + \tfrac{1}{4}(\Delta t)^2 - 1 \right)$$

$$= \tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 \cdot u_n^4 + (\Delta t)^2 u_n^3 + \left(\Delta t - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^3\right) u_n^2 + \left(1 - (\Delta t)^2\right) u_n + \left(\tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 - \Delta t\right)$$

Die Gleichgewichte erhalten wir nun aus

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} = \tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 u_n^4 + (\Delta t)^2 u_n^3 + \left(\Delta t - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^3\right) u_n^2 + \left(1 - (\Delta t)^2\right) u_n + \left(\tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 - \Delta t\right)$$

↳ Bedingung für Gleichgewichte (der zeitdiskreten Gleichung) „$u_{n+1} = u_n$"

$$\Rightarrow 0 = \tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 u_n^4 + (\Delta t)^2 u_n^3 + \left(\Delta t - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^3\right) u_n^2 - (\Delta t)^2 u_n + \left(\tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 - \Delta t\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}(\Delta t)^3 \cdot (u_n + 1) \cdot (u_n - 1) \cdot \left(u_n + \frac{2 - \Delta t}{\Delta t}\right) \cdot \left(u_n + \frac{2 + \Delta t}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow u_n = \pm 1, \underbrace{-\frac{2 \pm \Delta t}{\Delta t}}_{\substack{\to \infty \text{ für } \Delta t \to 0 \\ \in \mathbb{R}}} \qquad \forall \Delta t > 0$$

# Aufgabe 25:

## Gegeben:

- $u' = u(1-u)(1+u) =: f(u)$ $\quad (\Rightarrow Df(u) = (1-u)(1+u) - u\cdot(1+u) + u\cdot(1-u))$
- Klassisches RK-Verfahren (der Ordnung 4)

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 = 0 & 0_{a_{11}} & 0 & 0 & 0_{a_{14}} \\
c_2 = \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
c_3 = \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
c_4 = 1 & 0_{a_{41}} & 0 & 1 & 0_{a_{44}} \\
\hline
 & \frac{1}{6} = b_1 & \frac{1}{3} = b_2 & \frac{1}{3} = b_3 & \frac{1}{6} = b_4
\end{array}
$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle reellen Gleichgewichte des klassischen Runge-Kutta Verfahrens für die obige ODE zu den Schrittweiten

$$\Delta t \in \left\{10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right\}$$

**Lösung:** Herleitung des Gleichungssystems: (allgemein)

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{s} b_j K_j$$

Bedingung für Gleichgewichte (der zeitdiskreten Gleichung) "$u_{n+1} = u_n$"

$$\Rightarrow 0 = \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{s} b_j K_j =: F(u) \qquad F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\leftarrow$ Nullstellenproblem, nichtlinear, 1D $\rightsquigarrow$ Newton-Verfahren

Speziell für das obige klassische Runge-Kutta-Verfahren ($s=4$) erhalten wir

$$0 = \Delta t \cdot \left(\frac{1}{6} K_1 + \frac{1}{3} K_2 + \frac{1}{3} K_3 + \frac{1}{6} K_4\right)$$
$$= \frac{\Delta t}{6} \cdot \left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) =: F(u)$$

mit

$$K_j := f\left(t_n + \Delta t \cdot c_j, u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{s} a_{jl} K_l\right)$$

$$\Rightarrow K_1 = f(u)$$
$$K_2 = f\left(u + \frac{\Delta t}{2} \cdot K_1(u)\right)$$
$$K_3 = f\left(u + \frac{\Delta t}{2} \cdot K_2(u)\right)$$
$$K_4 = f\left(u + \Delta t \cdot K_3(u)\right)$$

Insbesondere ist ($DF(u)$ ist für das Newton-Verfahren nötig)

$$DF(u) = \frac{\Delta t}{6} \cdot \left(DK_1(u) + 2DK_2(u) + 2DK_3(u) + DK_4(u)\right)$$

und

$$DK_1(u) = Df(u)$$
$$DK_2(u) = Df\left(u + \tfrac{\Delta t}{2} \cdot K_1(u)\right) \cdot \left(1 + \tfrac{\Delta t}{2} \cdot DK_1(u)\right)$$
$$DK_3(u) = Df\left(u + \tfrac{\Delta t}{2} \cdot K_2(u)\right) \cdot \left(1 + \tfrac{\Delta t}{2} \cdot DK_2(u)\right)$$
$$DK_4(u) = Df\left(u + \Delta t \cdot K_3(u)\right) \cdot \left(1 + \Delta t \cdot DK_3(u)\right)$$

Newton-Verfahren:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{DF(u_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

```
function aufgabe25
    for deltat=[10,1,0.1,0.01,0.001]
        h=waitbar(0,'Suche nach Gleichgewichten...');
        realzeros=[49,5,5,5,5];
        deltax=1;
        eps=10^(-5);
        maxiter=100;
        f   = @(u) u*(1-u)*(1+u);
        k1  = @(u) f(u);
        k2  = @(u) f(u+1/2*deltat*k1(u));
        k3  = @(u) f(u+1/2*deltat*k2(u));
        k4  = @(u) f(u+deltat*k3(u));
        F   = @(u) k1(u)+2*k2(u)+2*k3(u)+k4(u);
        Df  = @(u) (1-u)*(1+u)-u*(1+u)+u*(1-u);
        Dk1 = @(u) Df(u);
        Dk2 = @(u) Df(u+1/2*deltat*k1(u))*(1+1/2*deltat*Dk1(u));
        Dk3 = @(u) Df(u+1/2*deltat*k2(u))*(1+1/2*deltat*Dk2(u));
        Dk4 = @(u) Df(u+deltat*k3(u))*(1+deltat*Dk3(u));
        DF  = @(u) Dk1(u)+2*Dk2(u)+2*Dk3(u)+Dk4(u);

        anz=0;
        index=find([10,1,0.1,0.01,0.001]==deltat);

        x=-2:deltax:2;
        while anz<realzeros(index)
            disp(['deltax=', num2str(deltax)]);
            for u0=x
                % 1. Newton-Verfahren anwenden
                [u,iter] = newton(F, DF, u0,eps,maxiter,0);
                % 2. Test, ob die Nullstelle bereits zuvor gefunden wurde
                found = 0;
                for i=1:anz
                    if norm(equilibrium(:,i)-u) < eps
                        found = 1;
                        continue;
                    end
                end
                if found==1
                    continue;
                end
                % 3. Nullstelle
                if norm(F(u))<eps
                    anz=anz+1;
                    disp(['Aktuelle Anzahl gefundener Gleichgewichte:', num2str
(anz), ', Gleichgewicht: ' num2str(u)]);
                    equilibrium(anz)=u;
                end
                waitbar(anz/realzeros(index),h,[num2str(anz) ' von ' num2str
(realzeros(index))]);
            end
            % 4. Verfeinere im Raum
            xgrob=-50:deltax:50;
            deltax=deltax/2;
            xfein=-50:deltax:50;
            mask=ones(1,length(xfein));
            for i=1:length(xgrob)
```

10

```
                ind=find(xfein==xgrob(i));
                if ~isempty(ind)
                    mask(ind)=0;
                end
            end
            x=xfein(logical(mask));
        end
        equilibrium=sort(equilibrium);
        close(h);
        disp(['Anzahl der gefundenen Gleichgewichte: ', num2str(anz)]);
    end
end

function [nst,n]=newton(F,dF,x0,eps,maxiter,newton_einfach)
%NEWTON1D Eindimensionales Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen
%          einer Funktion F
%     F                : Funktion
%     dF               : Ableitung der Funktion
%     x0               : Startwert
%     eps              : Genauigkeit
%     maxiter          : Maximale Anzahl an Iterationen
%     newton_einfach   : 0 = Newton-Verfahren
%                        1 = vereinfachtes Newton-Verfahren
%     nst              : Nullstelle der Funktion
%     n                : Anzahl der benoetigten Iterationen

    n = 0;
    xn = x0;
    yn = F(xn);
    if newton_einfach
        A0=dF(x0);
        while (max(abs(yn))>eps && n<maxiter)
            n = n+1;
            xn = xn - yn/A0;
            yn = F(xn);
        end
    else
        while (max(abs(yn))>eps && n<maxiter)
            n = n+1;
            xn = xn - yn/dF(xn);
            yn = F(xn);
        end
    end
    nst=xn;
end
```

$restart : dt := 10 :$
$f := u \rightarrow u \cdot (1-u) \cdot (1+u) :$
$k1 := expand(f(u)) :$
$k2 := expand\left(f\left(u + dt \cdot \frac{1}{2} \cdot k1\right)\right) :$
$k3 := expand\left(f\left(u + dt \cdot \frac{1}{2} \cdot k2\right)\right) :$
$k4 := expand(f(u + dt \cdot k3)) :$
$fsolve\left(dt \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k1 + \frac{1}{3} \cdot k2 + \frac{1}{3} \cdot k3 + \frac{1}{6} \cdot k4\right) = 0, u, real\right);$

−1.170377790, −1.156891179, −1.120231189, −1.096780658, −1.096565540, −1.095348407, −1.001048509, −1.000438957, −1., −0.9880031068, −0.9830069745, −0.1899087705, −0.1895101170, −0.1883222227, −0.1760810107, −0.1742567439, −0.1721520758, −0.1546729616, −0.1524052896, −0.1520940187, −0.03509855949, −0.03439704901, −0.03119470117, −0.003630457867, 0., 0.003630457867, 0.03119470117, 0.03439704901, 0.03509855949, 0.1520940187, 0.1524052896, 0.1546729616, 0.1721520758, 0.1742567439, 0.1760810107, 0.1883222227, 0.1895101170, 0.1899087705, 0.9830069745, 0.9880031068, 1., 1.000438957, 1.001048509, 1.095348407, 1.096565540, 1.096780658, 1.120231189, 1.156891179, 1.170377790 **(1)**

$restart : dt := 1 :$
$f := u \rightarrow u \cdot (1-u) \cdot (1+u) :$
$k1 := expand(f(u)) :$
$k2 := expand\left(f\left(u + dt \cdot \frac{1}{2} \cdot k1\right)\right) :$
$k3 := expand\left(f\left(u + dt \cdot \frac{1}{2} \cdot k2\right)\right) :$
$k4 := expand(f(u + dt \cdot k3)) :$
$fsolve\left(dt \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k1 + \frac{1}{3} \cdot k2 + \frac{1}{3} \cdot k3 + \frac{1}{6} \cdot k4\right) = 0, u, real\right);$

−1.969536599, −1., 0., 1., 1.969536599 **(2)**

$restart : dt := \frac{1}{10} :$
$f := u \rightarrow u \cdot (1-u) \cdot (1+u) :$
$k1 := expand(f(u)) :$
$k2 := expand\left(f\left(u + dt \cdot \frac{1}{2} \cdot k1\right)\right) :$
$k3 := expand\left(f\left(u + dt \cdot \frac{1}{2} \cdot k2\right)\right) :$
$k4 := expand(f(u + dt \cdot k3)) :$
$fsolve\left(dt \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k1 + \frac{1}{3} \cdot k2 + \frac{1}{3} \cdot k3 + \frac{1}{6} \cdot k4\right) = 0, u, real\right);$

−5.022958826, −1., 0., 1., 5.022958826 **(3)**

$restart : dt := \frac{1}{100} :$
$f := u \rightarrow u \cdot (1-u) \cdot (1+u) :$
$k1 := expand(f(u)) :$

$$k2 := expand\left(f\left(u + dt\cdot\frac{1}{2}\cdot k1\right)\right):$$
$$k3 := expand\left(f\left(u + dt\cdot\frac{1}{2}\cdot k2\right)\right):$$
$$k4 := expand(f(u + dt\cdot k3)):$$
$$fsolve\left(dt\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot k1 + \frac{1}{3}\cdot k2 + \frac{1}{3}\cdot k3 + \frac{1}{6}\cdot k4\right) = 0, u, real\right);$$

$$-15.49047743,\ -1.,\ 0.,\ 1.,\ 15.49047743 \qquad \textbf{(4)}$$

$$restart : dt := \frac{1}{1000}:$$
$$f := u \rightarrow u\cdot(1-u)\cdot(1+u):$$
$$k1 := expand(f(u)):$$
$$k2 := expand\left(f\left(u + dt\cdot\frac{1}{2}\cdot k1\right)\right):$$
$$k3 := expand\left(f\left(u + dt\cdot\frac{1}{2}\cdot k2\right)\right):$$
$$k4 := expand(f(u + dt\cdot k3)):$$
$$fsolve\left(dt\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot k1 + \frac{1}{3}\cdot k2 + \frac{1}{3}\cdot k3 + \frac{1}{6}\cdot k4\right) = 0, u, real\right);$$

$$-48.86250618,\ -1.,\ 0.,\ 1.,\ 48.86250618 \qquad \textbf{(5)}$$

$$restart : dt := \frac{1}{1000}:$$
$$f := u \rightarrow u\cdot(1-u)\cdot(1+u):$$
$$k1 := expand(f(u)):$$
$$k2 := expand\left(f\left(u + dt\cdot\frac{1}{2}\cdot k1\right)\right):$$
$$k3 := expand\left(f\left(u + dt\cdot\frac{1}{2}\cdot k2\right)\right):$$
$$k4 := expand(f(u + dt\cdot k3)):$$
$$degree\left(dt\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot k1 + \frac{1}{3}\cdot k2 + \frac{1}{3}\cdot k3 + \frac{1}{6}\cdot k4\right), u\right);$$

$$81 \qquad \textbf{(6)}$$