Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 9
10.6.2011

Abgabe: Freitag, 17.6.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 26: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = 4u(1-u)(1+u). \tag{1}$$

(a) Geben Sie sämtliche Gleichgewichte von (1) und deren Stabilitätsverhalten an.

(b) Bestimmen Sie eine maximale Schrittweite Δt, so dass die Gleichgewichte bei Diskretisierung mit dem **expliziten Euler-Verfahren** das gleiche Stabilitätsverhalten zeigen.

(c) Führen Sie die zu (b) entsprechende Analyse für das **implizite Euler-Verfahren** durch. Beachten Sie, dass die Rückwärts-Iteration explizit angegeben werden kann, Invertierbarkeit aber nur für hinreichend kleine Schrittweiten gewährleistet ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 27:

(i) Schreiben Sie ein Programm, das bei Diskretisierung der Differentialgleichung (1) mit dem **klassischen Runge-Kutta-Verfahren** die maximal zulässige Schrittweite angibt, für die das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichte erhalten bleibt.

(ii) Illustrieren Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 26 (b), (c) und aus Aufgabenteil (i) unter Verwendung der entsprechenden NUMLAB-GUI.

(6 Punkte)

Aufgabe 28: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m,$$

und ein (implizites) k-Schrittverfahren der Form

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u^{j+\nu} = \Psi(u^j, \ldots, u^{j+k}, \Delta t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Anfangsdaten:} &\quad u^0, \ldots, u^{k-1} \in \mathbb{R}^m, \\ \text{Koeffizienten:} &\quad a_\nu, \quad \nu = 0, \ldots, k, \quad a_k \neq 0, \\ \text{Verfahrensfunktion:} &\quad \Psi : \mathbb{R}^{(k+1)m} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

(A) Zeigen Sie, dass durch das Mehrschrittverfahren ein diskretes dynamisches System $(\mathbb{R}^{km}, \mathbb{N}_0, \Phi_{\Delta t})$ erzeugt wird.

- Führen Sie hierzu die Vektoren $U^j = (u^j, \ldots, u^{j+k-1})^T \in \mathbb{R}^{km}$ ein und schreiben Sie das Mehrschrittverfahren als

$$U^{j+1} = \Phi_{\Delta t}(U^j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

  Die Abbildung $\Phi_{\Delta t} : \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}$ ist dabei (implizit) durch das Lösen einer Gleichung der Form

$$U^{j+1} = (A \otimes I_m) U^j + \Delta t F(\Delta t, U^j, U^{j+1}),$$

  mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ und der nichtlinearen Funktion

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{km} \times \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}$$

  gegeben. Hierbei bezeichnet $\otimes$ das Kroneckerprodukt.
- Bestimmen Sie eine geeignete Wahl für A und F.

(B) Welche Form hat die Abbildung F im Fall eines linearen Mehrschrittverfahrens?

(C)
- Welche Form haben Fixpunkte von (2)?
- Wie lassen sich für ein konsistentes Verfahren die Fixpunkte von $\Phi_{\Delta t}$ mit Hilfe von Ψ bestimmen?

  Zeigen Sie zunächst, dass ein konsistentes Mehrschrittverfahren die Bedingung $\sum_{\nu=0}^{k} a_k = 0$ erfüllt, vgl. Numerik II.

(6 Punkte)

Aufgabe 26:

Gegeben: $u' = 4u(1-u)(1+u) =: f(u)$

Aufgabe:

(a): Bestimmen Sie die Gleichgewichte und deren Stabilitätsverhalten.

(b): Bestimmen Sie Δt_{max} derart, dass die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichte bei Verwendung des exp. Eulerverfahrens erhalten bleiben.

(c): Lösen Sie Teil (b) auch für das imp. Eulerverfahren.

Lösung:

zu (a): • (Gleichgewichte):

$$0 \overset{!}{=} f(u) = 4u(1-u)(1+u) \quad \left(= 4(u-u^3)\right)$$

Bedingung für Gleichgewichte (im Kontinuierlichen) „$u'=0$"

$$\Rightarrow \bar{u} \in \{0, \pm 1\}$$

• (Stabilität): Nach Satz 6.3 (Lyapunov) gilt:

$$\operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(Df(\bar{u})) \Rightarrow \bar{u} \text{ asym. stabil}$$

$$\exists \lambda \in \sigma(Df(\bar{u})) \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda > 0 \Rightarrow \bar{u} \text{ instabil}$$

Aus

$$Df(u) = f'(u) = 4 - 12u^2$$

erhalten wir

$$f'(0) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \text{ ist instabil}$$

$$f'(1) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ ist asym. stabil}$$

$$f'(-1) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \text{ ist asym. stabil}$$

Satz 6.3

zu (b): • (Gleichgewichte):

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} \overset{\text{exp. Euler}}{=} u_n + \Delta t\, f(u_n) =: \varphi_{\Delta t}(u_n) \qquad \text{„}u_{n+1} = u_n\text{"}$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta t\, f(\bar{u}_{\Delta t})$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{\Delta t} \in \{0, \pm 1\} \quad \forall \Delta t > 0$$

• (Stabilität): Nach Satz 6.5 gilt:

$$|\lambda| < 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(D\varphi_{\Delta t}(\bar{u}_{\Delta t})) \Rightarrow \bar{u}_{\Delta t} \text{ asym. stabil}$$

$$|\lambda| > 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(D\varphi_{\Delta t}(\bar{u}_{\Delta t})) \Rightarrow \bar{u}_{\Delta t} \text{ instabil}$$

Aus

$$D\varphi_{\Delta t}(u) = \varphi'_{\Delta t}(u) = 1 + \Delta t \cdot f'(u) = 1 + 4\Delta t - 12 \cdot \Delta t \cdot u^2$$

erhalten wir

- $|\varphi'_{\Delta t}(0)| = |1+4\cdot\Delta t| \overset{\Delta t>0}{=} 1+4\Delta t \overset{!}{>} 1 \iff \Delta t>0$
- $|\varphi'_{\Delta t}(1)| = |1-8\Delta t| \overset{!}{<} 1$

  1. Fall: $1-8\Delta t \geq 0$

     $\iff 1-8\Delta t < 1 \iff \Delta t>0$

  2. Fall: $1-8\Delta t<0$

     $\iff 8\Delta t -1 < 1 \iff \Delta t < \frac{1}{4}$

  $\Bigg\} \quad 0<\Delta t<\frac{1}{4}$

- $|\varphi'_{\Delta t}(-1)| = |1-8\Delta t| \overset{!}{<} 1$

  analog zu $|\varphi'_{\Delta t}(1)|$ erhalten wir : $\quad 0<\Delta t<\frac{1}{4}$

Somit bleibt das Stabilitätsverhalten für $\boxed{0<\Delta t<\frac{1}{4}}$ erhalten.

zu (c): • (Gleichgewichte):

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} \overset{\text{imp. Euler}}{=} u_n + \Delta t\, f(u_{n+1}) \overset{!}{=} u_n + \Delta t\cdot f(u_n) \qquad \text{„}u_{n+1}=u_n\text{"}$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta t\, f(\bar{u}_{\Delta t})$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{\Delta t} \in \{0,\pm 1\} \quad \forall \Delta t>0$$

• (Stabilität): Verwende erneut Satz 6.5.

Es ist

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\cdot f(u_{n+1})$$
$$\left(u_{n+1} = \varphi_{\Delta t}(u_n) \right)$$

$$\iff u_n = u_{n+1} - \Delta t\cdot f(u_{n+1}) =: G_{\Delta t}(u_{n+1}) \quad \longleftarrow \text{Rückwärtsiteration}$$

Hierbei ist $\varphi_{\Delta t} = G_{\Delta t}^{-1}$, insofern $G_{\Delta t}^{-1}$ existiert:

$$G_{\Delta t}(u) := u - \Delta t\cdot f(u)$$
$$G'_{\Delta t}(u) = 1 - \Delta t\cdot f'(u) = 1 - 4\Delta t + 12\Delta t u^2$$

Da $G_{\Delta t}(u)$ für $0<\Delta t<\frac{1}{4}$ streng monoton wachsend ist (auf ganz $\mathbb{R}$)

$$G'_{\Delta t}(u) = 1-4\Delta t + \underbrace{12\Delta t u^2}_{\geq 0 \,(\text{da } \Delta t>0)} \geq 1-4\Delta t \overset{!}{>} 0 \iff 0<\Delta t<\frac{1}{4}$$

existiert $G_{\Delta t}^{-1}(u)$ für $0<\Delta t<\frac{1}{4}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Beachte: Für $0<\Delta t<\frac{1}{4}$ gilt:

$$G_{\Delta t}(u) = u \iff \varphi_{\Delta t}(u) = G_{\Delta t}^{-1}(u) = u$$

$|DG_{\Delta t}(\bar{u}_{\Delta t})| > 1$ ($\Rightarrow \bar{u}_{\Delta t}$ asym. stabil) $\iff |\varphi'_{\Delta t}(\bar{u}_{\Delta t})| = |DG_{\Delta t}^{-1}(\bar{u}_{\Delta t})| < 1$ ($\Rightarrow \bar{u}_{\Delta t}$ asym. stabil)

und

$|DG_{\Delta t}(\bar{u}_{\Delta t})| < 1$ ($\Rightarrow \bar{u}_{\Delta t}$ instabil) und $|\varphi'_{\Delta t}(\bar{u}_{\Delta t})| = |DG_{\Delta t}^{-1}(\bar{u}_{\Delta t})| > 1$ ($\Rightarrow \bar{u}_{\Delta t}$ instabil)

Es gilt nun

- $|DG_{\Delta t}(0)| = |1-4\Delta t| \overset{!}{<} 1$

  1. Fall: $1-4\Delta t \geq 0$

     $\iff 1-4\Delta t < 1 \iff \Delta t>0$

  2. Fall: $1-4\Delta t<0$

     $\iff 4\Delta t-1<1 \iff \Delta t<\frac{1}{2}$

- $|DG_{\Delta t}(1)| = |1+8\Delta t| \underset{\Delta t>0}{=} 1+8\Delta t > 1 \iff \Delta t > 0$
- $|DG_{\Delta t}(-1)| = |1+8\Delta t| \underset{\Delta t>0}{=} 1+8\Delta t > 1 \iff \Delta t > 0$

Somit bleibt das Stabilitätsverhalten für $\boxed{0 < \Delta t < \frac{1}{4}}$ erhalten.

Aufgabe 27:

Gegeben: $u' = f(u) := 4u(1-u)(1+u)$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{4} b_j K_j =: \varphi_{\Delta t}(u_n)$$

$$K_j = K_j(u, \Delta t) := f\left(u_n + \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{4} a_{jl} K_l\right)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Klassisches RK-Verfahren (der Ordnung 4)

Aufgabe: Schreiben Sie ein Programm zur Approximation der maximalen zeitlichen Schrittweite Δt, so dass die Stabilitätseigenschaften aller Gleichgewichte der kontinuierlichen Gleichung erhalten bleiben.

Lösung: Die Gleichgewichte der kontinuierlichen Gleichung sind $\bar{u} = 0, \pm 1$. Hierbei ist 0 instabil und ± 1 stabil.

Informationen zur Implementierung:

1: Bestimmung des Gleichgewichte: Wähle $\Delta t > 0$ fest.

$$u_n \overset{!}{=} u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{4} b_j K_j =: \varphi_{\Delta t}(u_n)$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{4} b_j K_j =: \mathcal{F}(u) \quad , \quad \mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

zur Berechnung der Nullstelle u von $\mathcal{F}(u) = 0$ verwenden wir das Newton-Verfahren:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\mathcal{F}(u_n)}{D_u \mathcal{F}(u_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \quad \text{mit } D_u \mathcal{F}(u) = \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{4} b_j \cdot D_u K_j$$

Hierzu benötigen wir die Funktionen

$$f, \; D_u f, \; K_1, K_2, K_3, K_4, \; D_u K_1, D_u K_2, D_u K_3, D_u K_4$$

Die Startwerte u_0 sind aus einer geeigneten Umgebung von $\{-1, 0, 1\}$ zu wählen.

2: Bestimmung des Stabilitätseigenschaften: Wähle $\bar{u} \in \{-1, 0, 1\}$ fest. Es gilt:

$$|D_u \varphi_{\Delta t}(\bar{u})| < 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} \text{ stabil}$$

$$|D_u \varphi_{\Delta t}(\bar{u})| > 1 \quad \Rightarrow \quad u \text{ instabil}$$

Zur Untersuchung der Stabilitätseigenschaften betrachte die Gleichung

$$D_u \varphi_{\Delta t}(\bar{u}) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{1/2}(\Delta t) := D_u \varphi_{\Delta t}(\bar{u}) \mp 1 = 0$$

Beachte: $\bar{u}$ ist fest und Δt ist hierbei die Veränderliche. Zur Berechnung der Nullstelle $\Delta t_\pm \geq 0$ von $\mathcal{F}_{1/2}(\Delta t)$ verwenden wir das Newton-Verfahren:

$$(\Delta t)_{n+1} = (\Delta t)_n - \frac{\mathcal{F}_{1/2}((\Delta t)_n)}{D_{\Delta t} \mathcal{F}_{1/2}((\Delta t)_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \quad \text{mit}$$

$$D_{\Delta t} \mathcal{F}_{1/2}(\Delta t) = \sum_{j=1}^{4} b_j \cdot D_u K_j + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{4} b_j \cdot D_{\Delta t} D_u K_j$$

Hierzu benötigen wir die Funktionen

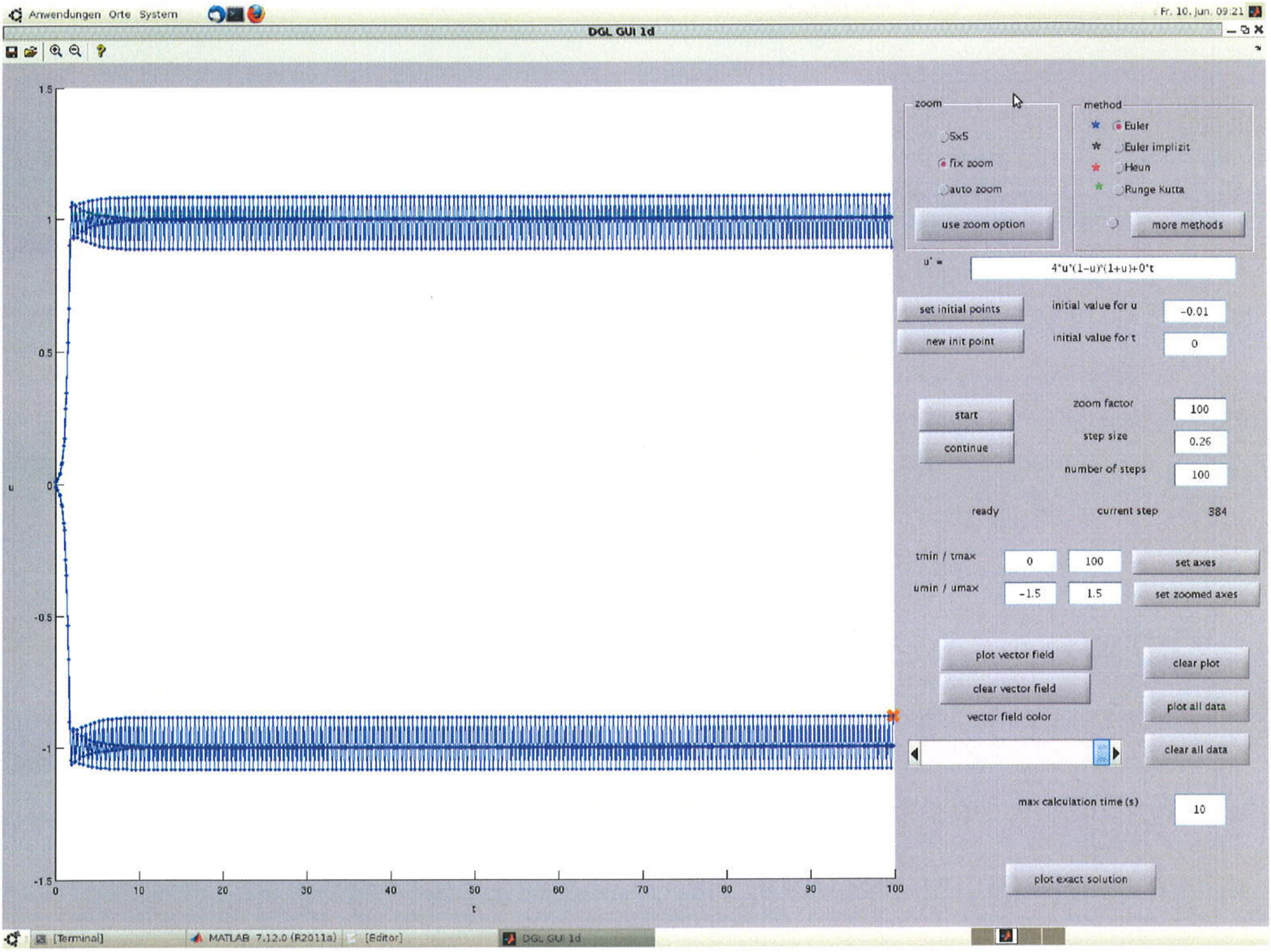
```
function aufgabe27
    clc; clear all;
    eps=10^(-14);
    maxiter=100;

    % Funktionen
    f     = @(u) 4*u*(1-u)*(1+u);
    k1    = @(u,deltat) f(u);
    k2    = @(u,deltat) f(u+1/2*deltat*k1(u,deltat));
    k3    = @(u,deltat) f(u+1/2*deltat*k2(u,deltat));
    k4    = @(u,deltat) f(u+deltat*k3(u,deltat));
    phi   = @(u,deltat) u+deltat/6*(k1(u,deltat)+2*k2(u,deltat)+2*k3(u,deltat)
+k4(u,deltat));
    % Ableitungen 1. Ordnung (nach u "D" und deltat "d")
    Df    = @(u) 4-12*u^2;
    Dk1   = @(u,deltat) Df(u);
    Dk2   = @(u,deltat) Df(u+1/2*deltat*k1(u,deltat))*(1+1/2*deltat*Dk1(u,
deltat));
    Dk3   = @(u,deltat) Df(u+1/2*deltat*k2(u,deltat))*(1+1/2*deltat*Dk2(u,
deltat));
    Dk4   = @(u,deltat) Df(u+deltat*k3(u,deltat))*(1+deltat*Dk3(u,deltat));
    Dphi  = @(u,deltat) 1+deltat/6*(Dk1(u,deltat)+2*Dk2(u,deltat)+2*Dk3(u,
deltat)+Dk4(u,deltat));
    dk1   = @(u,deltat) 0;
    dk2   = @(u,deltat) Df(u+1/2*deltat*k1(u,deltat))*(1/2*(k1(u,deltat)
+deltat*dk1(u,deltat)));
    dk3   = @(u,deltat) Df(u+1/2*deltat*k2(u,deltat))*(1/2*(k2(u,deltat)
+deltat*dk2(u,deltat)));
    % Ableitungen 2. Ordnung
    DDf   = @(u) -24*u;
    dDk1  = @(u,deltat) 0;
    dDk2  = @(u,deltat) DDf(u+1/2*deltat*k1(u,deltat))*(1/2*(k1(u,deltat)
+deltat*dk1(u,deltat)))*(1+1/2*deltat*Dk1(u,deltat))+Df(u+1/2*deltat*k1(u,
deltat))*(1/2*(Dk1(u,deltat)+deltat*dDk1(u,deltat)));
    dDk3  = @(u,deltat) DDf(u+1/2*deltat*k2(u,deltat))*(1/2*(k2(u,deltat)
+deltat*dk2(u,deltat)))*(1+1/2*deltat*Dk2(u,deltat))+Df(u+1/2*deltat*k2(u,
deltat))*(1/2*(Dk2(u,deltat)+deltat*dDk2(u,deltat)));
    dDk4  = @(u,deltat) DDf(u+deltat*k3(u,deltat))*(k3(u,deltat)+deltat*dk3(u,
deltat))*(1+deltat*Dk3(u,deltat))+Df(u+deltat*k3(u,deltat))*(Dk3(u,deltat)
+deltat*dDk3(u,deltat));
    dDphi = @(u,deltat) 1/6*(Dk1(u,deltat)+2*Dk2(u,deltat)+2*Dk3(u,deltat)+Dk4
(u,deltat))+deltat/6*(dDk1(u,deltat)+2*dDk2(u,deltat)+2*dDk3(u,deltat)+dDk4(u,
deltat));
    % Funktionen fuer das Newton-Verfahren
    F1     = @(u,deltat) Dphi(u,deltat)-1;
    F2     = @(u,deltat) Dphi(u,deltat)+1;
    dF     = @(u,deltat) dDphi(u,deltat);

    t0init=-2:0.1:2;
    ubarinit=[-1,0,1];
    deltat=zeros(6,length(t0init));
    iter=zeros(6,length(t0init));

    j=0;
    for ubar=ubarinit
        j=j+1;
```

```
        i=0;
        for t0=t0init
            i=i+1;
            % F1 Gleichung
            [deltatNV,iterNV] = newton(F1,dF,t0,ubar,eps,maxiter,0);
            if abs(F1(ubar,deltatNV))<=eps
                deltat(2*j-1,i)=deltatNV;
                iter(2*j-1,i)=iterNV;
            end
            % F2 Gleichung
            [deltatNV,iterNV] = newton(F2,dF,t0,ubar,eps,maxiter,0);
            if abs(F2(ubar,deltatNV))<=eps
                deltat(2*j,i)=deltatNV;
                iter(2*j,i)=iterNV;
            end
        end
    end
    deltat'
    iter'
end

function [nst,n]=newton(F,dF,x0,ubar,eps,maxiter,newton_einfach)
%NEWTON1D Eindimensionales Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen
%          einer Funktion F
%    F                 : Funktion
%    dF                : Ableitung der Funktion
%    x0                : Startwert
%    ubar              : Gleichgewicht
%    eps               : Genauigkeit
%    maxiter           : Maximale Anzahl an Iterationen
%    newton_einfach    : 0 = Newton-Verfahren
%                        1 = vereinfachtes Newton-Verfahren
%    nst               : Nullstelle der Funktion
%    n                 : Anzahl der benoetigten Iterationen

    n = 0;
    xn = x0;
    yn = F(ubar,xn);
    if newton_einfach
        A0=dF(ubar,x0);
        while (max(abs(yn))>eps && n<maxiter)
            n = n+1;
            xn = xn - yn/A0;
            yn = F(ubar,xn);
        end
    else
        while (max(abs(yn))>eps && n<maxiter)
            n = n+1;
            xn = xn - yn/dF(ubar,xn);
            yn = F(ubar,xn);
        end
    end
    nst=xn;
end
```

zu (ii): • Explizites Eulerverfahren:

Für die Berechnungen wurden folgende Parameter verwendet:

	asym. stable region for ±1	not asymp. stable region for ±1 (unstable)
initial value for u	± 0.01	± 0.01
step size Δt	0.24	0.26



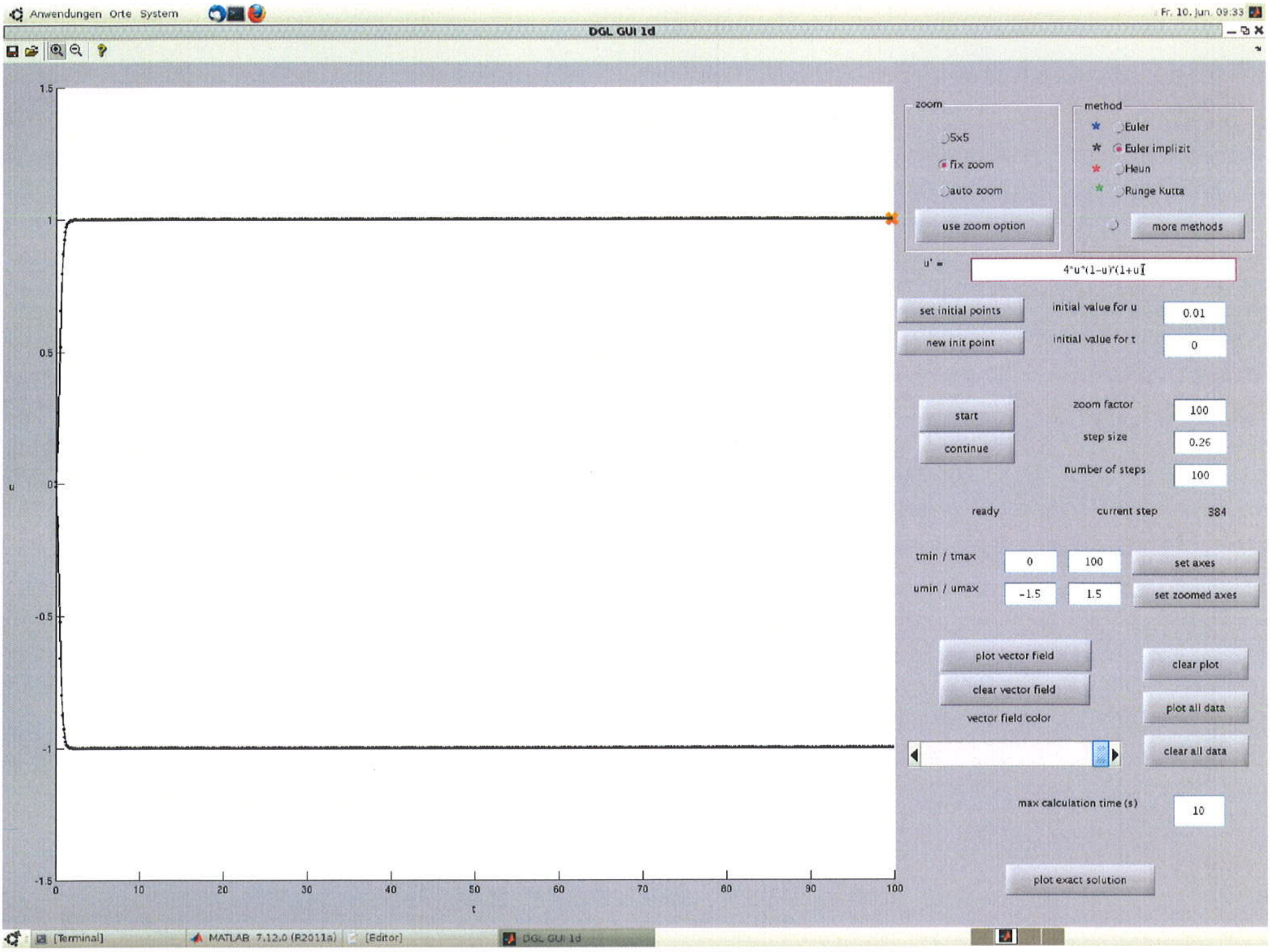
Beim expliziten Eulerverfahren ist zu beobachten, dass die Lösungstrajektorien beim Überschreiten des kritischen Wertes $\Delta t = \frac{1}{4}$ zu oszillieren beginnen. Dies ist ein Zeichen dafür, dass ± 1 nicht mehr asymptotisch stabil sind.

$\Longrightarrow$ ± 1 wird instabil

- Implizites Eulerverfahren: (1. Teil)

Für die Berechnungen wurden folgende Parameter verwendet:

	G invertierbar	G nicht invertierbar
initial value for u	± 0.01	± 0.01
step size Δt	0.24	0.26



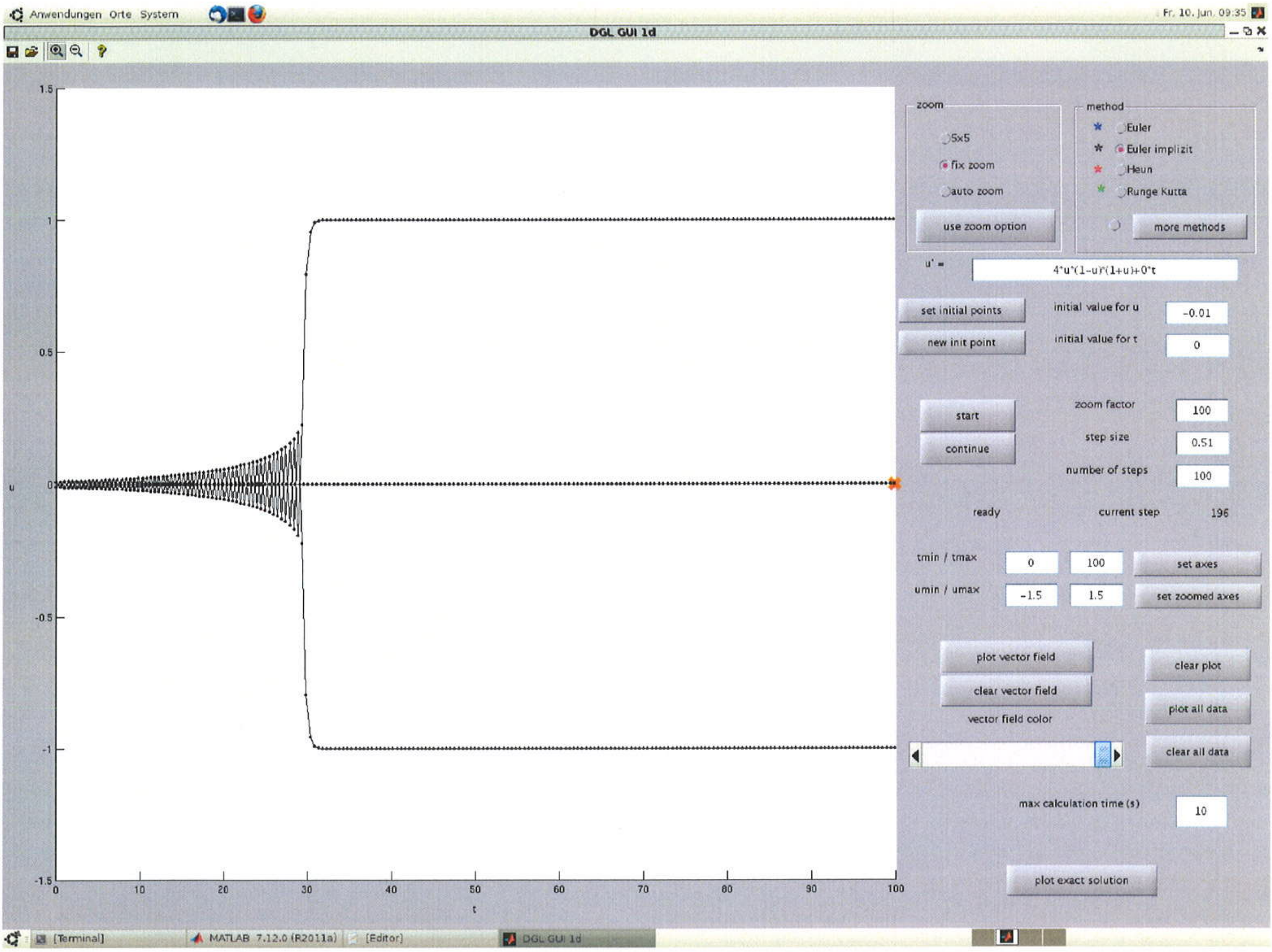
Die Bedingung $\Delta t < \frac{1}{4}$, die für die Invertierbarkeit von G benötigt wird, scheint bei diesem Beispiel keine Auswirkungen zu haben. Es ist zu beobachten, dass das Stabilitätsverhalten für $0, \pm 1$ auch bei leichtem Überschreiten von $\frac{1}{4}$ erhalten bleibt.

$\Longrightarrow$ Stabilitätsverhalten bleibt erhalten, trotz dessen, dass G nicht mehr invertierbar ist.

• Implizites Eulerverfahren: (2. Teil)

Für die Berechnungen wurden folgende Parameter verwendet:

	0 instabil	0 stabil
initial value for u	± 0.01	± 0.01
step size Δt	0.49	0.51



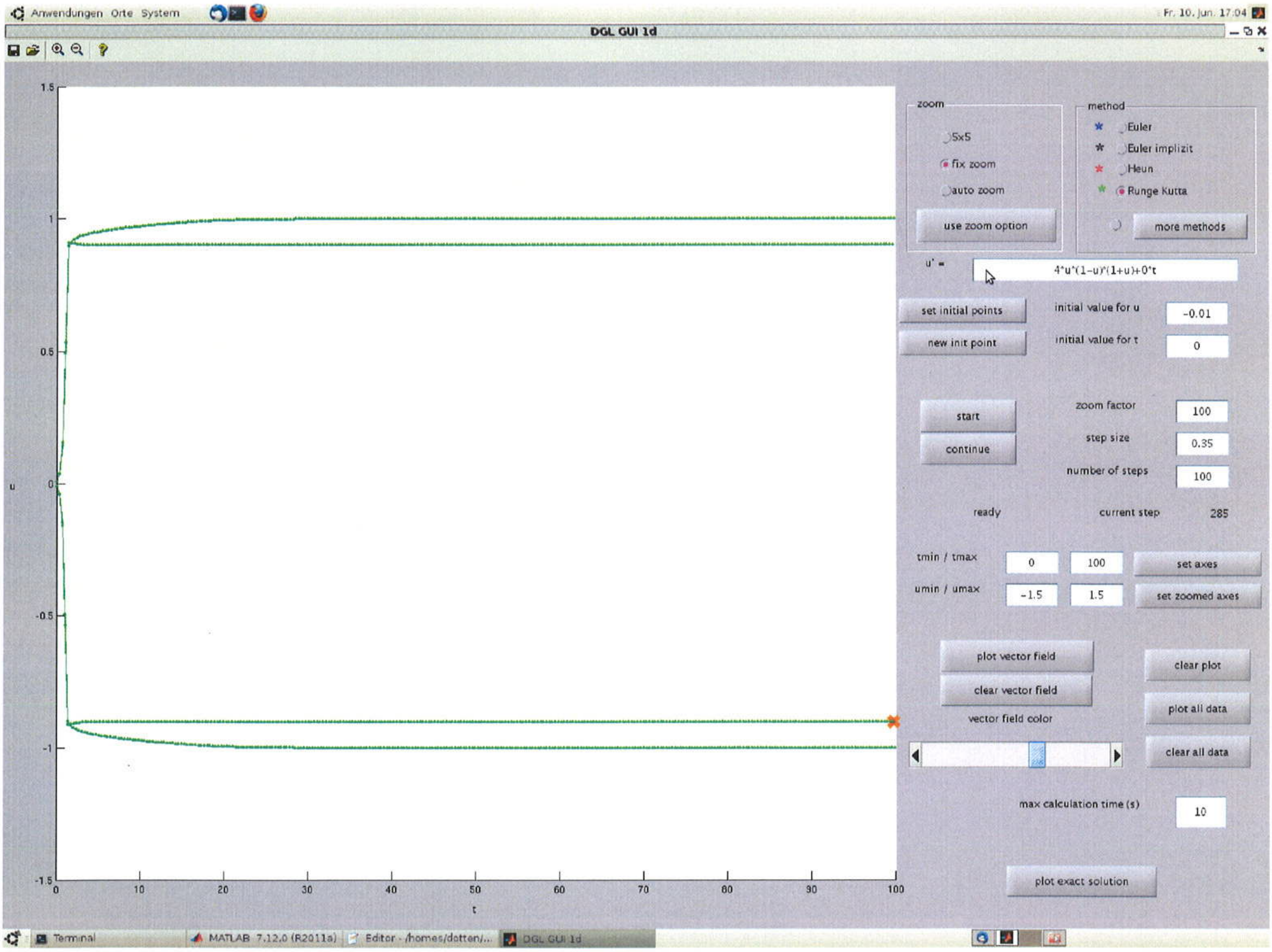
Die Bedingung $\Delta t < \frac{1}{2}$, die für die Erhaltung der Instabilität der 0 zuständig ist, ist in diesem Fall deutlich zu erkennen. Beim Überschreiten von $\Delta t = \frac{1}{2}$ wird die 0 zu einer stabilen Lösung.

$\Longrightarrow$ 0 wird stabil

- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (der Ordnung 4):

Für die Berechnungen wurden folgende Parameter verwendet:

	±1 asym. stabil	±1 instabil
initial value for u	±0.01	±0.01
step size Δt	0.34	0.35



Beim Klassischen Runge-Kutta-Verfahren ist zu Beobachten, dass ±1 beim überschreiten von $\Delta t = 0.348161\ldots$ instabil werden und die „spurios solutions" stabil werden.

$\Rightarrow$ ±1 instabil & „spurious solutions" stabil

↑

Gleichgewichte die durch Diskretisierung mit dem RK-Verfahren entstehen.

Aufgabe 28:

Gegeben: ①: $\dot{u} = f(u)$, $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$ Anfangswertproblem

②: $\frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{\nu=0}^{K} a_\nu u^{j+\nu} = \Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t)$, $j = 0,1,2,\dots$ (implizites) K-Schritt=verfahren

mit Anfangsdaten : $u^0, \dots, u^{K-1} \in \mathbb{R}^m$
Koeffizienten : a_ν $(\nu = 0, \dots, K)$ mit $a_K \neq 0$
Verfahrensfunktion : $\Psi: \mathbb{R}^{(K+1)m} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$

Lösung:

zu (A): Aus der Definition des (impliziten) K-Schrittverfahrens folgt

$$③: ② \iff u^{j+K} = -\frac{1}{a_K} \cdot \sum_{\nu=0}^{K-1} a_\nu \cdot u^{j+\nu} + \frac{\Delta t}{a_K} \cdot \Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t)$$

Daraus erhalten wir $\left(U^j := (u^j, \dots, u^{j+K-1})^T \right)$:

$$U^{j+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} u^{j+1} \\ \vdots \\ u^{j+K} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{Km}} \overset{③}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} u^{j+1} \\ \vdots \\ u^{j+K-1} \\ -\frac{1}{a_K} \cdot \sum_{\nu=0}^{K-1} a_\nu \cdot u^{j+\nu} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{Km}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{a_K} \cdot \Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{Km}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdot I_m & 1 \cdot I_m & 0 \cdot I_m & \cdots & 0 \cdot I_m \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \cdot I_m \\ 0 \cdot I_m & \cdots & \cdots & 0 \cdot I_m & 1 \cdot I_m \\ -\frac{a_0}{a_K} \cdot I_m & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{a_{K-1}}{a_K} \cdot I_m \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{Km \times Km}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u^j \\ \vdots \\ u^{j+K-1} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{Km}} + \Delta t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_K} \cdot \Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{Km}}$$

$$= \underbrace{\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_K} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{a_{K-1}}{a_K} \end{pmatrix}}_{=: A \in \mathbb{R}^{K \times K}} \otimes \underbrace{I_m}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \Bigg)}_{\in \mathbb{R}^{Km \times Km}} \underbrace{U^j}_{\in \mathbb{R}^{Km}} + \Delta t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_K} \cdot \Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t) \end{pmatrix}}_{=: F(U^j, U^{j+1}, \Delta t) \in \mathbb{R}^{Km}}$$

$$= (A \otimes I_m) U^j + \Delta t \cdot F(U^j, U^{j+1}, \Delta t)$$

Da diese Gleichung nur implizit gegeben ist, können wir keine explizite Darstellung für U^{j+1} angeben. U^{j+1} erhalten wir durch lösen eines nicht=linearen Gleichungssystems.

$$U^{j+1} = \begin{pmatrix} u^{j+1} \\ \vdots \\ u^{j+K} \end{pmatrix} = \Phi_{\Delta t} \begin{pmatrix} u^j \\ \vdots \\ u^{j+K-1} \end{pmatrix} = \Phi_{\Delta t}(U^j)$$

zu (B): Für ein lineares K-Schrittverfahren lässt sich die Verfahrensfunktion Ψ bezüglich des AWP's ① darstellen als (vgl. Numerik II, Kap. 3, Abs. 1.1, Formel (3.3))

$$\Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t) = \sum_{\nu=0}^{K} b_\nu \cdot f(u^{j+\nu})$$

somit erhalten wir für F die Darstellung

$$F(U^j, U^{j+1}, \Delta t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_K} \cdot \Psi(u^j, \dots, u^{j+K}, \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_K} \cdot \sum_{\nu=0}^{K} b_\nu \cdot f(u^{j+\nu}) \end{pmatrix}$$

zu (c): • Fixpunkte: Fixpunkte erfüllen $U^j = U^{j+1}$

$$U^j \overset{!}{=} U^{j+1} = (A \otimes I_m)U^j + \Delta t\, F(U^j, U^{j+1}, \Delta t) \overset{!}{=} (A \otimes I_m)U^j + \Delta t \cdot F(U^j, U^j, \Delta t)$$

$$\begin{pmatrix} u^j \\ \vdots \\ u^{j+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{j+1} \\ \vdots \\ u^{j+k} \end{pmatrix} = \cdots\cdots\cdots \to = \begin{pmatrix} u^{j+1} \\ \vdots \\ u^{j+k-1} \\ -\frac{1}{a_k} \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu u^{j+\nu} + \frac{\Delta t}{a_k} \cdot \psi(u^j, \dots, u^{j+k-1}, u^{j+k-1}, \Delta t) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$u^j = u^{j+1} = \dots = u^{j+k-1} = u^{j+k} = -\frac{1}{a_k} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu u^{j+\nu} + \frac{\Delta t}{a_k} \cdot \psi(u^j, \dots, u^{j+k-1}, u^{j+k-1}, \Delta t)$$

$\Rightarrow$ Fixpunkte $\bar{U} \in \mathbb{R}^{km}$ haben die Form $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ mit $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ und erfüllen die Eigenschaft

$$\bar{u} = -\frac{1}{a_k} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu \bar{u} + \frac{\Delta t}{a_k} \cdot \psi(\underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{k+1 \text{ mal}}, \Delta t)$$

$$\overset{\cdot a_k}{\Longleftrightarrow} \left(\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \right) \bar{u} = \Delta t \cdot \psi(\bar{u}, \dots, \bar{u}, \Delta t)$$

• Konsistentes Verfahren: Ein konsistentes lineares k-Schrittverfahren erfüllt notwendigerweise die Bedingung (vgl. Numerik II, Kap. 3, Abs. 2.2, letzte Zeile)

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu = 0$$

Damit ergibt sich

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Folg. aus Konsistenz} \\ \text{\& Linearität des MSV's}}}{=} \left(\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \right) \bar{u} = \Delta t \cdot \psi(\bar{u}, \dots, \bar{u}, \Delta t) \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität} \\ \text{des MSV's}}}{=} \Delta t \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu \right) \cdot f(\bar{u}) \right)$$

$$\overset{\Delta t > 0}{\Longleftrightarrow} 0 = \psi(\bar{u}, \dots, \bar{u}, \Delta t) = \left(\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu \right) \cdot f(\bar{u})$$

Damit erhalten wir die Fixpunkte $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \end{pmatrix}$, durch Bestimmung der Nullstellen von ψ. Insbesondere gilt

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{km} \text{ ist Fixpunkt} \\ \text{des linearen konsistenten} \\ \text{k-Schrittverfahrens} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \sum_{\nu=0}^{k} b_\nu = 0 \ \underline{\text{oder}}\ f(\bar{u}) = 0$$