Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 10
17.6.2011

Abgabe: Freitag, 24.6.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 29: Gegeben sei das zeitdiskrete dynamische System, das durch die Abbildung

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-1) + \frac{80}{3}(y-1)^3 + 1 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

(i) Bestimmen Sie das Gleichgewicht ξ und dessen Stabilitätsverhalten.

(ii) Geben Sie den stabilen Unterraum X_s und den instabilen Unterraum X_u an.

(iii) Bestimmen Sie Abbildungen

$$h^s : X_s \to X_u \quad \text{und} \quad h^u : X_u \to X_s$$

so dass die stabilen und instabilen Mengen die folgenden Graphendarstellungen besitzen:

$$\begin{aligned} W^s(\xi) &= \{\xi + x_s + h^s(x_s) : x_s \in X_s\}, \\ W^u(\xi) &= \{\xi + x_u + h^u(x_u) : x_u \in X_u\}. \end{aligned}$$

Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung ist es ratsam, das Gleichgewicht ξ in den Ursprung zu verschieben.

(iv) Illustrieren Sie diese Ergebnisse anhand einer Skizze.

(8 Punkte)

Aufgabe 30: Gegeben sei das durch die Hénon-Abbildung

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a, b\right) = \begin{pmatrix} 1 + y - ax^2 \\ bx \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad a = 1.5 \text{ und } b = 0.7$$

erzeugte diskrete dynamische System $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}, (f^n)_{n\in\mathbb{Z}})$.
Schreiben Sie ein Programm, das die in der Abbildung gezeigten stabilen und instabilen Mengen numerisch in vergleichbarer Qualität approximiert.
Verwenden Sie den folgenden Algorithmus zur Approximation von $W^u(\xi)$ bzw. $W^s(\xi)$:

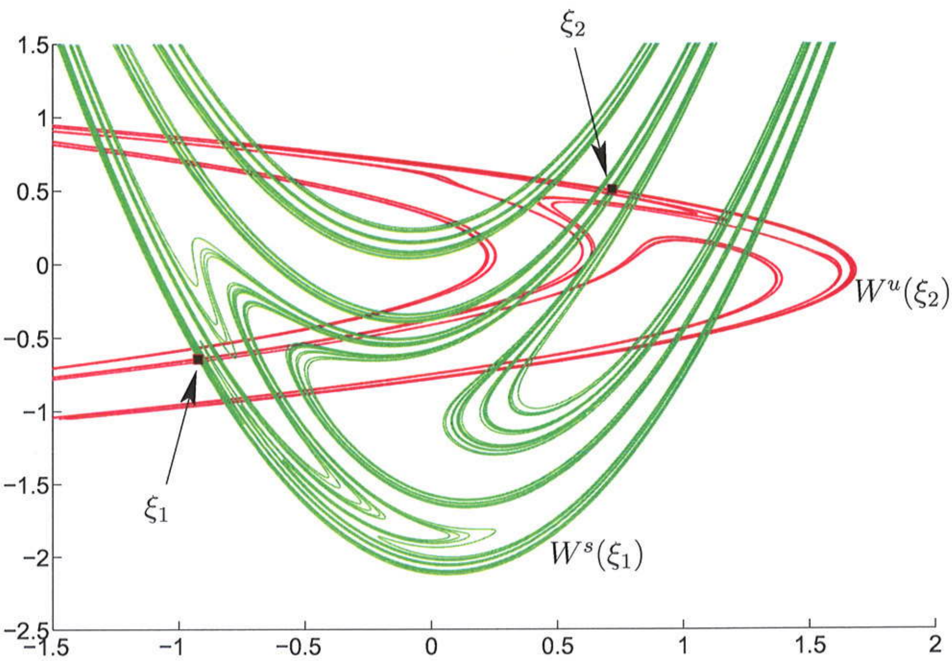
- Approximieren Sie zunächst die instabile Menge wie folgt:
- Bestimmen Sie den instabilen Unterraum X_u am Fixpunkt ξ.

- Berechnen Sie für n Startpunkte $x_0^n \in \{\xi + X_u\} \cap U(\xi)$ die Vorwärtsorbits der Länge m
$$x_{i+1}^n = f(x_i^n, a, b), \quad 0 \leq i < m.$$
Hierbei bezeichnet $U(\xi)$ eine hinreichend kleine Umgebung von ξ. Geeignete Werte für n und m sind durch Ausprobieren zu finden.

- Zeichnen Sie die einzelnen Punkte nur, wenn sie im Rechteck
$$[-1.5,\ 2] \times [-2.5,\ 1.5]$$
liegen. Brechen Sie die Iteration ab, falls dieser Bereich verlassen wird (Vermeiden eines Overflows!).

- Da sehr viele Punkte in der Nähe der Fixpunkte liegen, ist es ratsam, ein Gitter (der Größe 1000×1000) über den Zeichenbereich zu legen, und pro Gitterkästchen nur einen Punkt zu zeichnen.

- Beachten Sie, dass die stabile Menge der Abbildung f der instabilen Menge der Abbildung f^{-1} entspricht.



(10 Punkte)

Aufgabe 29:

Gegeben: Zeitdiskretes dynamisches System $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}, (f^n)_{n\in\mathbb{Z}})$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-1) + \frac{80}{3}(y-1)^3 + 1 \\ 3y-2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Lösung:

zu (i): • Gleichgewicht:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_n-1) + \frac{80}{3}(y_n-1)^3 + 1 \\ 3y_n - 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_n-1) + \frac{80}{3}\cdot(y_n-1)^3 + 1 - x_n \\ 3y_n - 2 - y_n \end{pmatrix}$$

Aus Gleichung 2 erhalten wir

$$0 = 2y_n - 2 \Rightarrow y_n = 1$$

Aus Gleichung 1 erhalten wir unter Verwendung von $y_n = 1$

$$0 = \frac{1}{3}(x_n-1) + 1 - x_n = -\frac{2}{3}\cdot(x_n-1) \Rightarrow x_n = 1$$

Daraus erhalten wir das Gleichgewicht

$$\boxed{\bar{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

• Stabilität:

$$Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 80(y-1)^2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir

$$Df(\bar{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{hyperbolisch (da } \sigma(Df(\bar{\xi})) \cap S_1 = \emptyset)$$

Diese Matrix besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ und $\lambda_2 = 3$. Es gilt:

$$|\lambda_1| = \frac{1}{3} \overset{!}{<} 1 \Rightarrow \lambda_1 \text{ stabiler Eigenwert}$$

$$|\lambda_2| = 3 \overset{!}{>} 1 \Rightarrow \lambda_2 \text{ instabiler Eigenwert}$$

Da der Spektralradius

$$\rho(Df(\bar{\xi})) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert von } Df(\bar{\xi})\} = 3 \overset{!}{>} 1$$

größer als 1 ist, ist das Gleichgewicht $\bar{\xi}$ (nach Satz 6.5) $\boxed{\text{instabil.}}$

zu (ii): • stabiler & instabiler Unterraum: Seien o.B.d.A. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die stabilen & $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ die instabilen Eigenwerte von $Df(\bar{\xi})$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_m$ bzw. $v_{m+1}, \dots, v_n$.

$$X_s := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$$

$$X_u := \operatorname{span}\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

Löse $Df(\bar{\xi})v_i = \lambda_i v_i$ nach v_i $(i = 1,2,\ n=2)$:

$$\underbrace{(Df(\bar{\xi}) - \lambda_1 I)}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}} v_1 = 0$$

$$\Rightarrow v_1^{(2)} = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_s = \left\{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$$

$$\underbrace{(Df(\bar{\xi}) - \lambda_2 I)}_{= \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_u = \left\{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$$

zu (iii): • Verschiebung des Gleichgewichts (in den Ursprung):

Betrachte das von

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\bar{\xi}\right)-\bar{\xi} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}x+\frac{80}{3}y^3\\ 3y\end{pmatrix}, \quad g^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-\frac{80}{27}y^3\\ \frac{1}{3}y\end{pmatrix}$$

erzeugte zeitdiskrete dynamische System. Das Gleichgewicht $\bar{\xi}$ des von f erzeugten dynamischen Systems entspricht dem Gleichgewicht $0 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ des von g erzeugten dynamischen Systems. Die Stabilitätseigenschaften bleiben hierbei erhalten. Ebenso bleiben der stabile Unterraum X^s sowie der instabile Unterraum X^u bei der Verschiebung unverändert.

• Bestimmung der Abbildungen h^s und h^u:

$$W^s(0) := \left\{ \xi_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \to 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ für } n\to\infty \right\} \text{ stabile Menge}$$

$$W^u(0) := \left\{ \xi_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \to 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ für } n\to-\infty \right\} \text{ instabile Menge}$$

Die Abbildungen

$$h^s : X_s \to X_u \qquad \text{bzw.} \qquad h^u : X_u \to X_s$$

sind nun so zu wählen, dass

$$W^s(0) = \{ x_s + h^s(x_s) \mid x_s \in X_s \} \quad \text{bzw.} \quad W^u(0) = \{ x_u + h^u(x_u) \mid x_u \in X_u \}$$

gilt. Aus diesen beiden Bedingungen folgt, dass ξ_0 die folgende Form haben muss

$$\xi_0 = x_s + h^s(x_s), \ x_s \in X_s \quad \text{bzw.} \quad \xi_0 = x_u + h^u(x_u), \ x_u \in X_u$$

und nach Definition von $W^s(0)$ bzw. $W^u(0)$ muss gelten

$$g^n(\xi_0) = g^n(x_s + h^s(x_s)) \to 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{für } n\to\infty$$

$$g^n(\xi_0) = g^n(x_u + h^s(x_u)) \to 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{für } n\to-\infty$$

Konkret:

$$g^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^n x_0 + \frac{3^{n-1}(81^n-1)}{80}\cdot\frac{80}{3}\cdot y_0^3\\ 3^n y_0\end{pmatrix}, n \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-i}\cdot(3^i)^3 = \frac{3^{n-1}\cdot(81^n-1)}{80}$$

$$g^{-n}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^n x_0 - \frac{81}{80}\cdot 3^{n-1}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{81}\right)^n\right)\cdot\frac{80}{27}\cdot y_0^3\\ \left(\frac{1}{3}\right)^n y_0\end{pmatrix}, n>0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i}\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)^3 = \frac{81}{80}\cdot 3^{n-1}\left(1-\left(\frac{1}{81}\right)^n\right)$$

$$X_s = \alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$X_u = \alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \ \alpha\in\mathbb{R}$$

– zu h^s:

$$g^n(\xi_0) = g^n(x_s + h^s(x_s)) = g^n\left(\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}h_1^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\\ h_2^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\alpha + h_1^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\right) + \frac{3^{n-1}\cdot(81^n-1)}{80}\cdot\frac{80}{3}\cdot\left(h_2^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\right)^3\\ 3^n h_2^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{!} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Hierbei liefert uns die zweite Komponente $h_2^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} = 0 \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$. Dies eingesetzt in die erste Komponente liefert uns $h_1^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} = c_\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Da jedoch

$$\begin{pmatrix}c_\alpha\\0\end{pmatrix} = h^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} \overset{!}{\in} X_u := \left\{\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

folgt $c_\alpha = 0 \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$. Somit ist $h^s\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$, bzw. $\boxed{h^s(x_s) = 0 \ \forall x_s\in X_s}$

– zu h^u:

$$g^{-n}(\xi_0) = g^{-n}(x_u + h^u(x_u)) = g^{-n}\left(\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}h_1^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}\\ h_2^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}3^n\cdot h_1^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} - \frac{\cancel{81}\,3}{\cancel{80}}\cdot 3^{n-1}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{81}\right)^n\right)\cdot\frac{\cancel{80}}{\cancel{27}}\cdot\left(\alpha + h_2^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}\right)^3\\ \left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\alpha + h_2^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{!} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Hierbei liefert uns die zweite Komponente $h_2^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} = c_\alpha \in\mathbb{R}$ beliebig. Dies eingesetzt in die erste Komponente

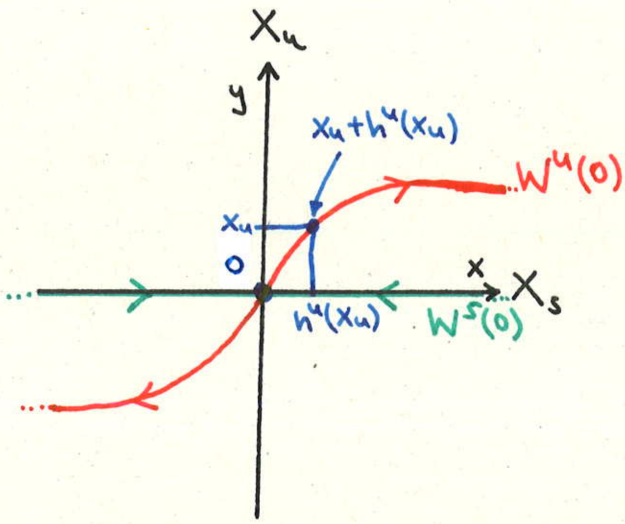
$$\underbrace{3^n}_{\to\infty}\cdot\left(h_1^u\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} - \underbrace{\left(1-\left(\frac{1}{81}\right)^n\right)}_{\to 1}\cdot(\alpha+c_\alpha)^3\right) \xrightarrow{!} 0$$

Liefert $h_1^u\binom{0}{\alpha} = (\alpha + c_\alpha)^3$. c_α erhalten wir nun aus

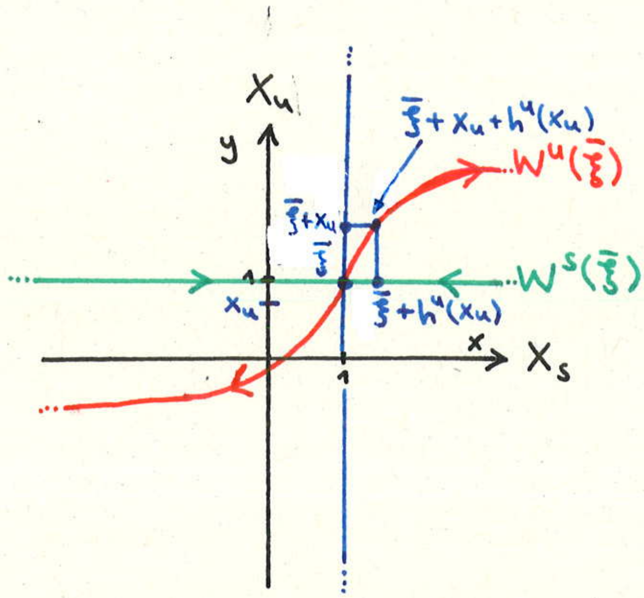
$$\binom{(\alpha+c_\alpha)^3}{c_\alpha} = h^u\binom{0}{\alpha} \overset{!}{\in} X_s = \left\{\binom{\alpha}{0} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

Daraus folgt $c_\alpha = 0 \;\forall \alpha\in\mathbb{R}$. Somit ist $\boxed{h^u\binom{0}{\alpha} = \binom{\alpha^3}{0} \;\forall\alpha\in\mathbb{R}}$.

Zu (iv):



Verschobenes System (g)



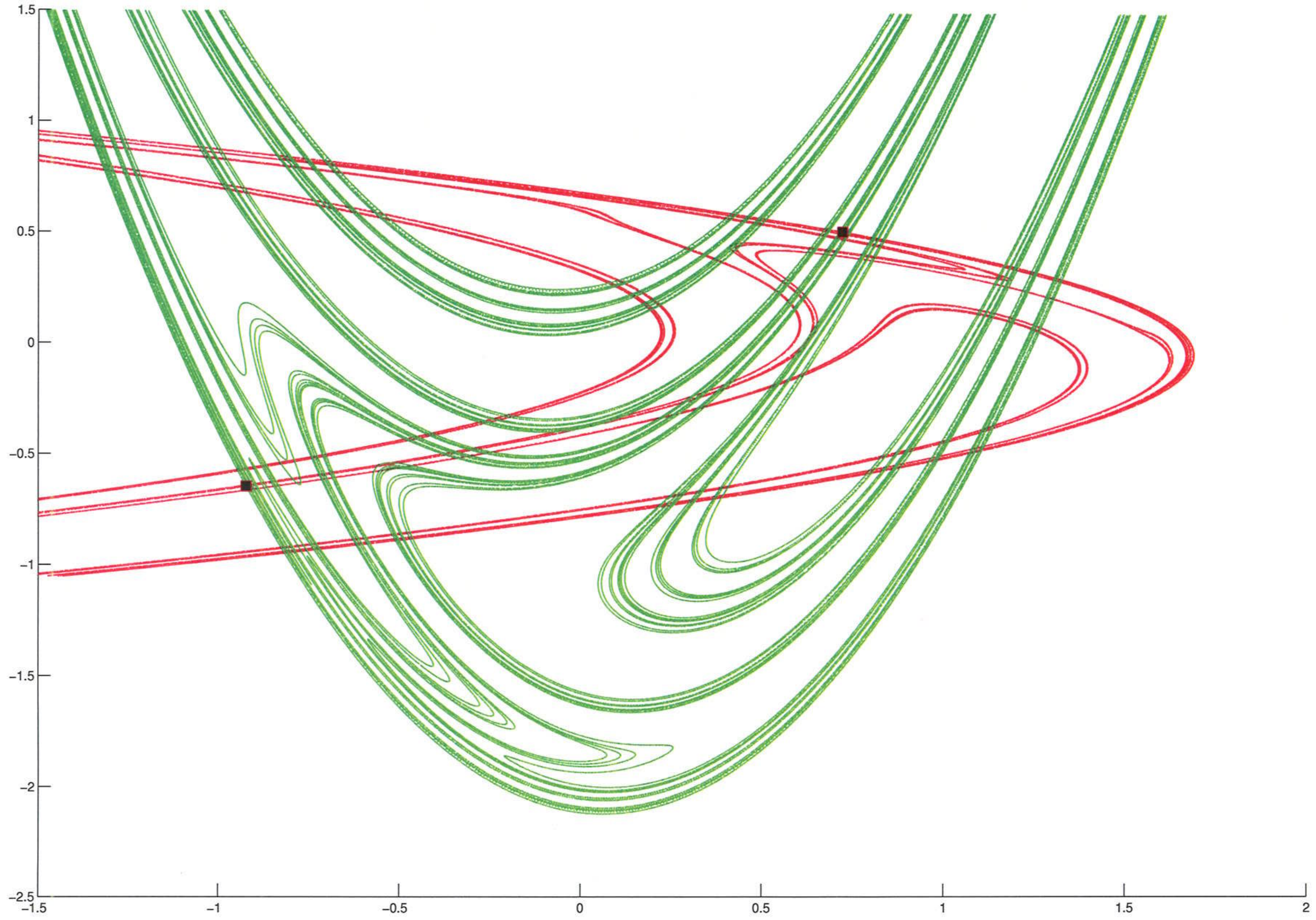
Ausgangssystem (f)

Aufgabe 30

```
function aufgabe30
    clc; clear all;

    DF = @Dhenon;

    % Parameter fuer die Henon-Abbildung
    la1=1.5;
    la2=0.7;
    par(1) = la1;
    par(2) = la2;
    fix1 = fixhenon1(par);
    fix2 = fixhenon2(par);

    G = figure('Name','Heterokliner bzw. homokliner Orbit');
    hold on;

    mfk_approx_stab(DF,fix1',par,50000000,15)
    mfk_approx_instab(DF,fix2',par,100000,100)

    plot(fix1(1),fix1(2),'rs','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',10)
    plot(fix2(1),fix2(2),'rs','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',10)

    hold off;
end

% Dhenon
function d = Dhenon(x,par)
a = par(1);
b = par(2);
d(1,1) = -2*a*x(1);
d(1,2) = 1;
d(2,1) = b;
d(2,2) = 0;
end

% fixhenon1
function x = fixhenon1(par)
a=par(1);
b=par(2);
z = (b-1 - sqrt((b-1)^2 + 4*a)) / (2*a);
x(1) = z;
x(2) = b*z;
end

% fixhenon2
function x = fixhenon2(par)
a=par(1);
b=par(2);
z = (b-1 + sqrt((b-1)^2 + 4*a)) / (2*a);
x(1) = z;
x(2) = b*z;
end

function mfk_approx_stab(DF,x,par,l,k)
    % DF  = Ableitung von f
    % x   = Fixpunkt von f
```

```
    % par = Systemparameter (bzgl. f)
    % l   = Startpunkte
    % k   = Anzahl der Iterationen
    g_a = 1000; % Gitterpunkte in x Richtung
    g_b = 1000; % Gitterpunkte in y Richtung
    Gitter = zeros(g_a, g_b); %
    g_x1 = -1.5;
    g_x2 = 2;
    g_y1 = -2.5;
    g_y2 = 1.5;
    h_x = (g_x2 - g_x1)/(g_a);
    h_y = (g_y2 - g_y1)/(g_b);
    [U,V] = eig(DF(x,par)); % U: spaltenweise Eigenvektoren
                            % V : Diagonalmatrix mit Eigenwerten auf Diag.
    if abs(V(1,1)) > 1      % Test, ob EW betragsm. groesser 1 => EW insta.
        index = 2;
    else
        index = 1;
    end
    u = U(:,index)';        % weise u den stabilen EV zu
    P = zeros(g_a*g_b/10,2);
    count=0;
    h = 1/(100*l);
    for i = -l : l
        p = x' + (i*h * u); % Startpunkt
        for j = 1 : k
            p = [1/par(2) * p(2); p(1) + par(1)/(par(2)^2) * p(2)^2 - 1]; %
Inverse von f
            n_x = round((p(1) - g_x1)/h_x) + 1; % zur Bestimmung des Kaestchens
x-Richtung
            n_y = round((p(2) - g_y1)/h_y) + 1; % Zur Bestimmung des Kaestchens
y-Richtung
            if (n_x > g_a) || (n_y > g_b) || (n_x <= 0) || (n_y <= 0)
                break; % Bricht die Iteration ab, falls der aktuelle
Iterationspunkt
                       % ausserhalb des Plotbereichs liegt
            end
            if Gitter(n_x,n_y) == 0  % Ueberpruefe, ob im Kaestchen bereits
gezeichnet wurde
                count = count + 1;
                P(count,:) = p;      % Fuege P den aktuellen punkt hinzu
                Gitter(n_x,n_y) = 1; % Gitter blockiert
            end
        end
    end
    plot(P(1:count,1),P(1:count,2),'.','MarkerSize',3,'Color','green'); %
Zeichnet die Punkte
end

% mfk_approx_instab
function mfk_approx_instab(DF,x,par,l,k)
    % DF  = Ableitung von f
    % x   = Fixpunkte von f
    % par = Systemparameter (bzgl. f)
    % l   = Startpunkte
    % k   = Anzahl der Iterationen
```

```
    g_a = 1000;
    g_b = 1000;
    Gitter = zeros(g_a, g_b);
    g_x1 = -1.5;
    g_x2 = 2;
    g_y1 = -2.5;
    g_y2 = 1.5;
    h_x = (g_x2 - g_x1)/(g_a);
    h_y = (g_y2 - g_y1)/(g_b);
    [U,V] = eig(DF(x,par));
    if abs(V(1,1)) > 1
        index = 1;
    else
        index = 2;
    end
    u = U(:,index)';
    P = zeros(g_a*g_b/10,2);
    count=0;
    h = 1/(100*l);
    for i = -l : l
        p = x' + (i*h * u);
        for j = 1 : k
            p = [1+p(2) - par(1)*p(1)^2; par(2)*p(1)];
            n_x = round((p(1) - g_x1)/h_x) + 1;
            n_y = round((p(2) - g_y1)/h_y) + 1;
            if (n_x > g_a) || (n_y > g_b) || (n_x <= 0) || (n_y <= 0)
                break;
            end
            if Gitter(n_x,n_y) == 0
                count = count + 1;
                P(count,:) = p;
                Gitter(n_x,n_y) = 1;
            end
        end
    end
    plot(P(1:count,1),P(1:count,2),'.','MarkerSize',3,'Color','red');
end
```


1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2