Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 11
24.6.2011

Abgabe: Freitag, 1.7.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 31: Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ein Diffeomorphismus, $f(\bar{u}) = \bar{u}$ und U eine Umgebung von $\bar{u}$.

(a) Seien $W^s_U(\bar{u})$ und $W^s(\bar{u})$ die lokal- bzw. global stabile Menge des Fixpunktes $\bar{u}$ des zeitdiskreten dynamischen Systems

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

$$W^s(\bar{u}) = \bigcup_{n \le 0} f^n(W^s_U(\bar{u})).$$

(b) Geben Sie die entsprechende Bedingung für die instabile Menge (mit Beweis) an.

(c) Wie kann ein entsprechender Zusammenhang zwischen global- und lokal stabilen Mengen für das kontinuierliche System

$$u' = f(u)$$

angegeben werden ?

(d) Sei A eine asymptotisch stabile Menge (vgl. Abschnitt 6) und sei $\bar{u} \in A$ ein Gleichgewicht des zugehörigen kontinuierlichen bzw. diskreten dynamischen Systems.

Diskutieren Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen:

(d.1) $W^s(\bar{u}) \subset A$,

(d.2) $W^s(\bar{u}) \supset A$,

(d.3) $W^u(\bar{u}) \subset A$.

(e) Illustrieren Sie die wahren Aussagen aus Aufgabenteil (d) anhand einer Skizze.

(f) Bestimmen Sie die stabilen und instabilen Mengen der Fixpunkte des symbolischen dynamischen Systems aus Aufgabe 4.

(9 Punkte)

Aufgabe 32:

(i) Gegeben sei das durch den glatten Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ erzeugte zeitdiskrete dynamische System. Sei $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ ein p-periodischer Orbit und sei $M = \{\bar{u}_1, .., \bar{u}_p\}$.

Wir definieren die global stabile und instabile Menge dieses periodischen Orbits mittels

$$\begin{aligned} W^s(M) &= \{u \in \mathbb{R}^m : \mathrm{dist}(f^n(u), M) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}, \\ W^u(M) &= \{u \in \mathbb{R}^m : \mathrm{dist}(f^n(u), M) \to 0 \text{ für } n \to -\infty\}. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, \ldots, p\}$, dann ist $\bar{u}_i$ offensichtlich ein Fixpunkt von

$$f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ mal}}.$$

Wir bezeichnen die stabile bzw. instabile Mengen des Fixpunktes $\bar{u}_i$ bezüglich der Abbildung f^p mit $W_p^{s,u}(\bar{u}_i)$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(i.1) $W^s(M) = \bigcup_{i=1}^p W_p^s(\bar{u}_i)$,

(i.2) $W^u(M) = \bigcup_{i=1}^p W_p^u(\bar{u}_i)$.

(ii) Konkret betrachten wir die Abbildung

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}x + x^3 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

(ii.1) Bestimmen Sie einen zwei-periodischen Orbit $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ von f.

Geben Sie die folgenden Mengen an:

(ii.2) $W_2^s(\bar{u}_1)$, $W_2^s(\bar{u}_2)$,

(ii.3) $W_2^u(\bar{u}_1)$, $W_2^u(\bar{u}_2)$,

(ii.4) $W^s(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$, $W^u(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$.

Erstellen Sie eine Abbildung.

(9 Punkte)

Aufgabe 31:

Gegeben:
- $f \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ Diffeomorphismus (d.h. f bijektiv & stetig diffbar und f^{-1} stetig diffbar)
- $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ Fixpunkt von f (d.h. $f(\bar{u}) = \bar{u}$)
- $U = U(\bar{u}) \subset \mathbb{R}^m$ Umgebung von $\bar{u}$

Lösungen:

zu (a):
$$W^s_U(\bar{u}) := \{u_0 \in U \mid \varphi^n(u_0) \to \bar{u} \text{ für } n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \infty \text{ und } \varphi^n(u_0) \in U \ \forall n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\} \subset U$$
$$W^s(\bar{u}) := \{u_0 \in \mathbb{R}^m \mid \varphi^n(u_0) \to \bar{u} \text{ für } n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \infty\} \subset \mathbb{R}^m$$
lokale bzw. globale stabile Menge von $\bar{u}$ des zeitdiskreten DS's $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{Z}$.

zz: $\boxed{W^s(\bar{u}) = \bigcup_{n \leq 0} f^n(W^s_U(\bar{u}))}$

Beweis: $\varphi^n = f^n$.

$\subseteq$: Sei $u_0 \in W^s(\bar{u}) \subset \mathbb{R}^m$ beliebig, dann gilt
$$\varphi^n(u_0) \to \bar{u} \text{ für } n \to \infty, n \in \mathbb{Z}$$
und somit insbesondere
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \ \forall n \geq N: \ \varphi^n(u_0) \in U_\varepsilon(\bar{u})$$
Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $U_\varepsilon(\bar{u}) \subset U$ gilt. Dann gilt $\varphi^n(u_0) \in W^s_U(\bar{u})$ $\forall n \geq N$, denn
$$\varphi^m(\varphi^n(u_0)) \to \bar{u} \quad \text{für } m \to \infty \quad \forall n \geq N$$
$$\varphi^m(\underbrace{\varphi^n(u_0)}_{\substack{\in U_\varepsilon(\bar{u}) \subset U \\ \forall n \geq N}}) \in U \quad \forall m \geq 0 \ \forall n \geq N$$
Daraus folgern wir
$$\varphi^n(u_0) \in W^s_U(\bar{u}) \quad \forall n \geq N$$
$$\underset{\varphi \text{ umkehrbar}}{\Rightarrow} u_0 \in \varphi^{-n}(W^s_U(\bar{u})) = f^{-n}(W^s_U(\bar{u})) \ \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow u_0 \in \bigcup_{n \leq 0} f^n(W^s_U(\bar{u})).$$

$\supseteq$: Sei $u_0 \in \bigcup_{n \leq 0} f^n(W^s_U(\bar{u}))$ beliebig. Dann gilt:
$$\exists m \in \mathbb{N}_0 : u_0 \in f^{-m}(W^s_U(\bar{u}))$$
Da f umkehrbar ist, gilt weiter
$$f^m(u_0) = \varphi^m(u_0) \in W^s_U(\bar{u})$$
d.h.
$$\underbrace{\varphi^n(\varphi^m(u_0))}_{= \varphi^{n+m}(u_0)} \to \bar{u} \quad \text{für } n \to \infty$$
Setze $s := n + m$, so gilt
$$\varphi^s(u_0) \to \bar{u} \text{ für } s \to \infty$$
und somit $u_0 \in W^s(\bar{u})$. ∎

zu (b): Ersetze in (a) n durch $-n$, d.h. die entsprechende Bedingung lautet

$$\boxed{W^u(\bar{u}) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W^u_U(\bar{u}))}$$

Beweis:
$$W^u_f(\bar{u}) \overset{\substack{g := f^{-1} \\ \Rightarrow g^{-1} = f}}{=} W^u_{g^{-1}}(\bar{u}) = W^s_g(\bar{u}) \overset{(a)}{=} \bigcup_{n \leq 0} g^n(W^s_{U,g}(\bar{u})) = \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(W^u_{U,g^{-1}}(\bar{u})) \overset{g^{-1} = f}{=} \bigcup_{n \geq 0} f^n(W^u_{U,f}(\bar{u}))$$
∎

zu (c): Beim Übergang vom zeitdiskreten dynamischen System $(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}, \{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ zum kontinuierlichen dynamischen System $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}})$ ist in den Bedingungen des Erzeuges sowie die Zeitmenge entsprechend anzupassen.

$$\boxed{(a)' : \quad W^s(\bar u) = \bigcup_{\substack{t\le 0\\ t\in\mathbb{R}_-}} \varphi^t(W^s_u(\bar u))}$$

$$\boxed{(b)' : \quad W^u(\bar u) = \bigcup_{\substack{t\ge 0\\ t\in\mathbb{R}_+}} \varphi^t(W^u_u(\bar u))}$$

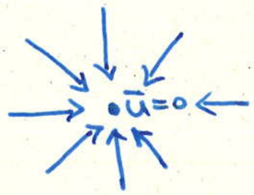
zu (d): A asymptotisch stabile Menge, $\bar u \in A$ Gleichgewicht des zugehörigen kontinuierlichen bzw. diskreten DS's.

zu (d.1): Die Aussage

$$\boxed{W^s(\bar u) \subset A}$$

ist i. Allg. falsch! Gegenbeispiel: Betrachte $X = \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(u) := a\cdot u \;, \quad a \in]-1,0[$$



diskret: Das durch

$$u_{n+1} = f(u_n) = a\cdot u_n$$

erzeugte diskrete DS $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, (f^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ besitzt den Fixpunkt $\bar u = 0$, denn

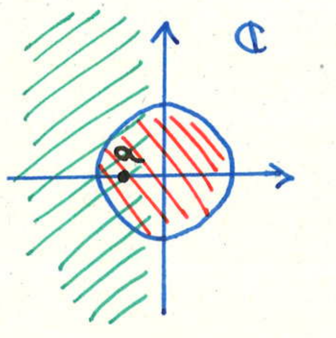
$$\bar u = f(\bar u) = a\cdot\bar u \Rightarrow (a-1)\cdot\bar u = \bar u \underset{a\neq 1}{\Rightarrow} \bar u = 0 .$$

Dieser ist asymptotisch stabil, denn

$$\left| Df(u)|_{u=\bar u} \right| = |a| < 1 .$$

Damit ist $A = \{0\} = \{\bar u\}$ ein Attraktor des diskreten DS's. Insbesondere ist $\bar u = 0$ der einzige Fixpunkt des Systems und $A = \{0\}$ ein globaler Attraktor. Die stabile Mannigfaltigkeit von $\bar u = 0$ ist

$$W^s(\bar u) = W^s(0) = \mathbb{R} \overset{!}{\not\subset} A = \{0\} = \{\bar u\}$$



//: Stabilitätsbereich im Kontinuierlichen
\\\: Stabilitätsbereich im Diskreten

Kontinuierlich: Das durch

$$u' = f(u) = a\cdot u$$

erzeugte kontinuierliche dynamische System $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}})$ besitzt das Gleichgewicht $\bar u = 0$, denn

$$0 \overset{!}{=} u' = f(\bar u) = a\cdot\bar u \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} \bar u = 0 .$$

Dies ist asymptotisch stabil, denn

$$\operatorname{Re} Df(u)|_{u=\bar u} = \operatorname{Re} a = a < 0 .$$

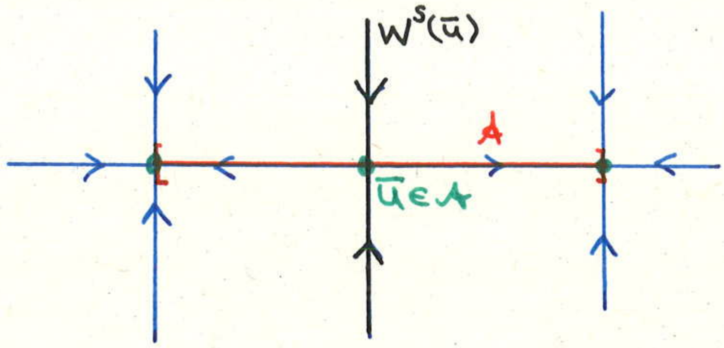
Damit ist $A = \{0\} = \{\bar u\}$ ein Attraktor des kontinuierlichen DS's. Insbesondere ist $\bar u = 0$ das einzige Gleichgewicht des Systems und $A = \{0\}$ ein globaler Attraktor. Die stabile Mannigfaltigkeit von $\bar u = 0$ ist

$$W^s(\bar u) = W^s(0) = \mathbb{R} \overset{!}{\not\subset} A = \{0\} = \{\bar u\} .$$

zu (d.2): Die Aussage

$$\boxed{W^s(\bar u) \supset A}$$

ist i. Allg. falsch! Gegenbeispiel: Als Gegenbeispiel betrachte die folgende Abbildung:



Die Voraussetzung für dieses Gegenbeispiel ist, dass $\overline{u}$ ein Sattel ist und zusätzlich zu $\overline{u}$ weitere asymptotisch stabile Fixpunkte existieren.

zu (d.3): Die Aussage

$$\boxed{W^u(\overline{u}) \subset A}$$

ist wahr!

Beweis: Angenommen

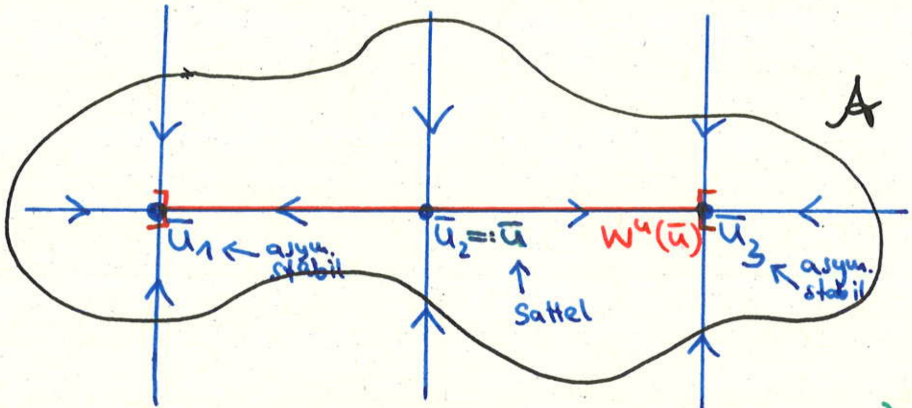
$$\exists u_0 \in W^u(\overline{u}) \;:\; u_0 \notin A$$

A anziehend & L-stabil $\Uparrow$

dann gilt

$$\varphi^n(u_0) \xrightarrow{n \to -\infty} \overline{u} \in A \quad \lightning \; A \text{ anziehend (denn } A \text{ ist asym. stabil)}$$

zu (e):



zu (f): $N \in \mathbb{N}$

$S_N := \{ (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid u_i \in \{0,\dots,N-1\} \;\forall i \in \mathbb{Z} \}$

$d(u,v) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| \cdot 3^{-|i|}$

(S_N, d) metrischer Raum

$(\varphi(u))_i = u_{i+1}$, $u \in S_N$, $i \in \mathbb{Z}$ (links shift)

$(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ diskretes, stetiges & invertierbares DS

} Vgl. Aufg. 4

Fixpunkte: (Konstante Folgen)

$\overline{u} = \dots aaaa \dots \in S_N$, $a \in \{0,\dots,N-1\}$

instabil!

} Vgl. Aufg. 9(ii)

Sei $\overline{u} = \dots aaaa \dots \in S_N$, $a \in \{0,\dots,N-1\}$ beliebig. Definiere:

$$W^s(\bar{u}) := \{u \in S_N \mid d(\varphi^n(u), \bar{u}) \to 0,\ n \to \infty,\ n \in \mathbb{Z}\}$$
$$W^u(\bar{u}) := \{u \in S_N \mid d(\varphi^{-n}(u), \bar{u}) \to 0,\ n \to \infty,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Definiere:

$$B^s(\bar{u}) := \{u \in S_N \mid \exists N_1 \in \mathbb{Z}\ \forall i \geq N_1 : u_i = a\}$$
$$B^u(\bar{u}) := \{u \in S_N \mid \exists N_2 \in \mathbb{Z}\ \forall i \leq N_2 : u_i = a\}$$

Behauptung:

$$\boxed{\begin{array}{l} ①: W^s(\bar{u}) = B^s(\bar{u}) \\ ②: W^u(\bar{u}) = B^u(\bar{u}) \end{array}}$$

Beweis:

zu ①: $\supseteq$: Sei $u \in B^s(\bar{u})$, d.h. $u \in S_N$ mit der Eigenschaft

(A) $\exists N_1 \in \mathbb{Z}\ \forall i \geq N_1 : u_i = a$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) = \max\left\{N_1 - 1, -\frac{\ln\left(\frac{2\varepsilon}{N} \cdot 3^{-N_1}\right)}{\ln 3}\right\}$, dann gilt für $n \geq \tilde{N}$:

$$d(\varphi^n(u), \bar{u}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |(\varphi^n(u))_i - a| \cdot 3^{-|i|}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+n} - a| \cdot 3^{-|i|} = \sum_{i=-\infty}^{N_1-n-1} \underbrace{|u_{i+n} - a|}_{\leq N} \cdot 3^{-|i|} + \sum_{i=N_1-n}^{\infty} \underbrace{|\overbrace{u_{i+n}}^{\overset{(A)}{=} a\ \forall i \geq N_1 - n} - a|}_{=0\ \forall i \geq N_1 - n} \cdot 3^{-|i|}$$

$$\leq N \cdot \sum_{i=-\infty}^{N_1-n-1} 3^{-|i|} = N \cdot \sum_{i=n+1-N_1}^{\infty} 3^{-|i|} = N \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 3^{-|i+n+1-N_1|}$$

$$\underset{n \geq N_1 - 1}{=} N \cdot 3^{-(n+1-N_1)} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i}}_{= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}} = \frac{N}{2} \cdot 3^{-n+N_1} \overset{!}{\underset{n \geq \tilde{N}}{<}} \varepsilon \quad \forall n > \tilde{N}$$

$$\left(\iff 0 < 3^{-n} < \frac{2\varepsilon}{N} \cdot 3^{-N_1} \iff -n \cdot \ln 3 < \ln\left(\frac{2\varepsilon}{N} \cdot 3^{-N_1}\right) \iff n > -\frac{\ln\left(\frac{2\varepsilon}{N} \cdot 3^{-N_1}\right)}{\ln 3} \right)$$

$\Rightarrow B^s(\bar{u}) \subseteq W^s(\bar{u})$.

$\subseteq$: Sei $u \in S_N \setminus B^s(\bar{u})$, d.h. $u \in S_N$ mit der Eigenschaft

(B) $\forall N_1 \in \mathbb{Z}\ \exists i \geq N_1 : u_i \neq a$

Ang. es gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N} \in \mathbb{Z}\ \forall n \geq \tilde{N}$:

$$d(\varphi^n(u), \bar{u}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+n} - a| \cdot 3^{-|i|} < \varepsilon$$

Wegen (B) mit $N_1 = n$ gilt: zu $n\ (\geq \tilde{N}) \in \mathbb{Z}$

$\exists j \geq n : u_j \neq a$

$$\Rightarrow d(\varphi^n(u), \bar{u}) = \underbrace{\sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} |u_{i+j} - a| \cdot 3^{-|i|}}_{>0} + \underbrace{|u_j - a|}_{\substack{\geq 1 \\ \leq N}} \overset{!}{<} \varepsilon \quad ↯$$

$\Rightarrow W^s(\bar{u}) \subseteq B^s(\bar{u})$

$\Rightarrow W^s(\bar{u}) = B^s(\bar{u})$

zu ② $\supseteq$: Sei $u \in B^u(\bar{u})$, d.h. $u \in S_N$ mit der Eigenschaft

ⓒ $\exists N_2 \in \mathbb{Z}\ \forall i \leq N_2 : u_i = a$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) := \max\{-N_2 - 1, -\frac{\ln(\frac{2\varepsilon}{N} \cdot 3^{N_2})}{\ln 3}\}$,

dann gilt für $n > \tilde{N}$:

$$d(\varphi^{-n}(u), \bar{u}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |(\varphi^{-n}(u))_i - a| \cdot 3^{-|i|}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i-n} - a| \cdot 3^{-|i|} = \sum_{i=-\infty}^{N_2+n} \underbrace{|\overbrace{u_{i-n}}^{\text{ⓒ} = a\ \forall i \leq N_2+n} - a|}_{=0\ \forall i \leq N_2+n} \cdot 3^{-|i|} + \sum_{i=N_2+n+1}^{\infty} \underbrace{|u_{i-n} - a|}_{\leq N} \cdot 3^{-|i|}$$

$$\leq N \cdot \sum_{i=N_2+n+1}^{\infty} 3^{-|i|} = N \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 3^{-|i+N_2+n+1|}$$

$$\underset{n \geq -N_2-1}{=} N \cdot 3^{-(n+N_2+1)} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i}}_{=\frac{3}{2}} = \frac{N}{2} \cdot 3^{-n-N_2} \overset{!}{\underset{\underset{n > \tilde{N}}{\uparrow}}{<}} \varepsilon \quad \forall n > \tilde{N}$$

$$\left(\Longleftrightarrow 0 < 3^{-n} < \frac{2\varepsilon}{N} \cdot e^{N_2} \Longleftrightarrow -n \cdot \ln 3 < \ln\left(\frac{2\varepsilon}{N} \cdot e^{N_2}\right) \right.$$

$$\left. \Longleftrightarrow \quad n > -\frac{\ln(\frac{2\varepsilon}{N} \cdot e^{N_2})}{\ln 3} \right)$$

$\Longrightarrow B^u(\bar{u}) \subseteq W^u(\bar{u})$

$\subseteq$: Sei $u \in S_N \setminus B^u(\bar{u})$, d.h. $u \in S_N$ mit der Eigenschaft

ⓓ $\forall N_2 \in \mathbb{Z}\ \exists i \leq N_2 : u_i \neq a$

Ang. es gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N} \in \mathbb{Z}\ \forall n \geq \tilde{N}$:

$$d(\varphi^{-n}(u), \bar{u}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i-n} - a| \cdot 3^{-|i|} < \varepsilon$$

wegen ⓓ mit $N_2 = n$ gilt: zu $n\ (\geq \tilde{N}) \in \mathbb{Z}$

$\exists j \geq n : u_j \neq a$

$$\Longrightarrow d(\varphi^{-n}(u), \bar{u}) = \underbrace{\sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} |u_{i-j} - a| \cdot 3^{-|i|}}_{\geq 0} + \underbrace{|u_{-j} - a|}_{\substack{\geq 1 \\ \leq N}} \overset{!}{<} \varepsilon \quad ↯$$

$\Longrightarrow W^u(\bar{u}) \subseteq B^u(\bar{u})$

$\Longrightarrow W^u(\bar{u}) = B^u(\bar{u})$

■

Aufgabe 32: zu (i):

Gegeben:

- $u^{n+1} = f(u^n)$
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ Diffeomorphismus (d.h. f bijektiv und stetig diffbar, f^{-1} stetig diffbar)
- $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p$ p-periodischer Orbit
- $M := \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p\}$
- $W^s(M) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid dist(f^n(u), M) \to 0,\ n \to \infty\}$ stabile Menge

  $W^u(M) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid dist(f^n(u), M) \to 0,\ n \to -\infty\}$ instabile Menge
- Für $i \in \{1, \dots, p\}$ ist $\bar{u}_i$ ein Fixpunkt bezüglich der Abbildung $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p\text{-mal}}$
- $W_p^s(\bar{u}_i) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid d(f^{p \cdot n}(u), \bar{u}_i) \to 0,\ n \to \infty\}$

  $W_p^u(\bar{u}_i) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid d(f^{p \cdot n}(u), \bar{u}_i) \to 0,\ n \to -\infty\}$

Lösung: zu (i.1): Die Aussage

$$\boxed{W^s(M) = \bigcup_{i=1}^{p} W_p^s(\bar{u}_i)}$$

ist wahr! Beweis:

$\supseteq$: Sei $u \in \bigcup_{i=1}^{p} W_p^s(\bar{u}_i)$

$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, p\} : u \in W_p^s(\bar{u}_i)$

Sei o.B.d.A. $i = 1$, dann gilt per Definition von $W_p^s(\bar{u}_1)$

$u \in \mathbb{R}^m$, $f^{p \cdot n}(u) \to \bar{u}_1$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow u \in \mathbb{R}^m$, $\forall \varepsilon_1^0 > 0\ \exists N\ \forall n > N :\ f^{p \cdot n}(u) \in U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)$

Wegen der Konvergenz gilt

$$U_{\varepsilon_1^1}(\bar{u}_1) := f^p(U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)) \subsetneqq U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)$$

induktiv: $U_{\varepsilon_1^{j+1}}(\bar{u}_1) := f^p(U_{\varepsilon_1^j}(\bar{u}_1)) \subsetneqq U_{\varepsilon_1^j}(\bar{u}_1)$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 0$

Wenden wir auf die Mengen $U_{\varepsilon_1^{j+1}}(\bar{u}_1) \subsetneqq U_{\varepsilon_1^j}(\bar{u}_1)$ die Funktion f an so erhalten wir

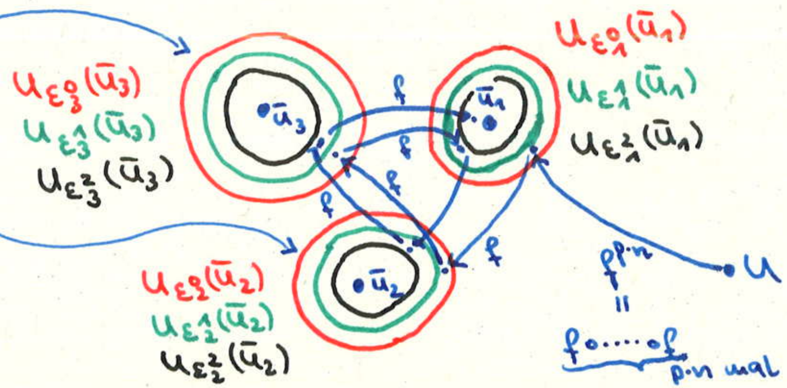
$$U_{\varepsilon_2^{j+1}}(\bar{u}_2) := f(U_{\varepsilon_1^{j+1}}(\bar{u}_1)) \subsetneqq f(U_{\varepsilon_1^j}(\bar{u}_1)) =: U_{\varepsilon_2^j}(\bar{u}_2)$$

$$U_{\varepsilon_3^{j+1}}(\bar{u}_3) := f(U_{\varepsilon_2^{j+1}}(\bar{u}_2)) \subsetneqq f(U_{\varepsilon_2^j}(\bar{u}_2)) =: U_{\varepsilon_3^j}(\bar{u}_3)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$U_{\varepsilon_p^{j+1}}(\bar{u}_p) := f(U_{\varepsilon_{p-1}^{j+1}}(\bar{u}_{p-1})) \subsetneqq f(U_{\varepsilon_{p-1}^j}(\bar{u}_{p-1})) =: U_{\varepsilon_p^j}(\bar{u}_p)$$

Diese Mengen müssen nicht notwendig Kugeln sein!



Daraus erhalten wir schlussendlich: ⊛

$$\mathrm{dist}(f^m(u), M) = \inf_{i=1,\dots,p} |f^m(u) - \bar{u}_i|$$

$$\underset{\substack{m \geq p\cdot n \\ n \geq N}}{=} \inf_{i=1,\dots,p} |f^{p\cdot n + j}(u) - \bar{u}_i| \quad , \; j \geq 0, \; j \in \mathbb{N}$$

$$= \inf_{i=1,\dots,p} |f^j(f^{p\cdot n}(u)) - \bar{u}_i|$$

$$\underset{\substack{j = p\cdot r + k \\ k \in \{0,\dots,p-1\} \\ r \geq r_0}}{=} \inf_{i=1,\dots,p} |\underbrace{f^k(\underbrace{f^{p\cdot r}(\underbrace{f^{p\cdot n}(u)}_{\in U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)})}_{\in U_{\varepsilon_1^r}(\bar{u}_1)})}_{\in U_{\varepsilon_{k+1}^r}(\bar{u}_{k+1})} - \bar{u}_i|$$

$$\underset{i=k+1}{=} \varepsilon_{k+1}^r \leq \max\{\varepsilon_1^{r_0}, \dots, \varepsilon_p^{r_0}\} < \varepsilon \quad \Rightarrow u \in W^s(M)$$

⊛ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $r_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\max\{\varepsilon_1^{r_0}, \dots, \varepsilon_p^{r_0}\} < \varepsilon$
Nun setze $\tilde{N} := \tilde{N}(\varepsilon) := p\cdot N + p\cdot r_0(\varepsilon)$, dann gilt für alle
$m = p\cdot n + p\cdot r + k \geq \tilde{N}$ $(n \geq N, r \geq r_0, k \in \{0,\dots,p-1\})$:

$\subseteq$: Sei $u \in W^s(M)$

$$\Rightarrow u \in \mathbb{R}^m, \; \underbrace{\mathrm{dist}(f^m(u), M)}_{= \inf_{i=1,\dots,p} d(f^m(u), \bar{u}_i)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Insbesondere gilt für die Teilfolge $m_k := p\cdot k$, dass sie gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, d.h.

$$\inf_{i=1,\dots,p} d(f^{p\cdot k}(u), \bar{u}_i) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Da $\bar{u}_i$ Fixpunkte von f^p sind, folgt

$$\Rightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,p\}: d(f^{p\cdot k}(u), \bar{u}_i) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,p\}: u \in W^s_p(\bar{u}_i)$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{i=1}^{p} W^s_p(\bar{u}_i).$$

zu (i.2): Die Aussage

$$\boxed{W^u(M) = \bigcup_{i=1}^{p} W^u_p(\bar{u}_i)}$$

ist wahr! Beweis:

$\supseteq$: Sei $u \in \bigcup_{i=1}^{p} W^u_p(\bar{u}_i)$

$$\Rightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,p\}: u \in W^u_p(\bar{u}_i)$$

Sei o.B.d.A. $i = 1$, dann gilt per Definition von $W^u_p(\bar{u}_1)$

$$u \in \mathbb{R}^m, \; f^{-p\cdot n}(u) \to \bar{u}_1 \text{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow u \in \mathbb{R}^m, \; \forall \varepsilon_1^0 > 0 \; \exists N \; \forall n > N: f^{-p\cdot n}(u) \in U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)$$

Wegen der Konvergenz gilt

$$U_{\varepsilon_1^1}(\bar{u}_1) := f^{-p}(U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)) \subsetneq U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)$$

induktiv: $U_{\varepsilon_1^{j+1}}(\bar{u}_1) := f^{-p}(U_{\varepsilon_1^j}(\bar{u}_1)) \subsetneq U_{\varepsilon_1^j}(\bar{u}_1)$, $j \in \mathbb{N}, j \geq 0$

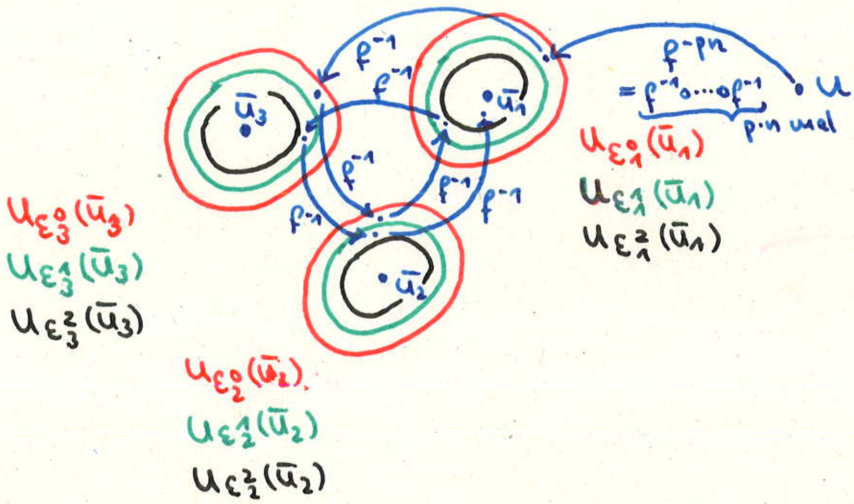
Wenden wir auf die Mengen $U_{\varepsilon_1^{j+1}}(\bar{u}_1) \subsetneq U_{\varepsilon_1^{j}}(\bar{u}_1)$ die Funktion f^{-1} an, so erhalten wir

$$U_{\varepsilon_p^{j+1}}(\bar{u}_p) := f^{-1}(U_{\varepsilon_1^{j+1}}(\bar{u}_1)) \subsetneq f^{-1}(U_{\varepsilon_1^{j}}(\bar{u}_1)) =: U_{\varepsilon_p^{j}}(\bar{u}_p)$$

$$U_{\varepsilon_{p-1}^{j+1}}(\bar{u}_{p-1}) := f^{-1}(U_{\varepsilon_p^{j+1}}(\bar{u}_p)) \subsetneq f^{-1}(U_{\varepsilon_p^{j}}(\bar{u}_p)) =: U_{\varepsilon_{p-1}^{j}}(\bar{u}_{p-1})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$U_{\varepsilon_2^{j+1}}(\bar{u}_2) := f^{-1}(U_{\varepsilon_3^{j+1}}(\bar{u}_3)) \subsetneq f^{-1}(U_{\varepsilon_3^{j}}(\bar{u}_3)) =: U_{\varepsilon_2^{j}}(\bar{u}_2)$$



Daraus erhalten wir schlussendlich: ⊛

$$\operatorname{dist}(f^{-m}(u), M) = \inf_{i=1,\dots,p} |f^{-m}(u) - \bar{u}_i|$$

$$\underset{\substack{m \geq p\cdot n \\ n > N}}{=} \inf_{i=1,\dots,p} |f^{-p\cdot n - j}(u) - \bar{u}_i| \qquad , \; j \geq 0, \; j \in \mathbb{N}$$

$$= \inf_{i=1,\dots,p} |f^{-j}(f^{-p\cdot n}(u)) - \bar{u}_i|$$

$$\underset{\substack{j = p\cdot r + k \\ k \in \{0,\dots,p-1\} \\ r \geq r_0}}{=} \inf_{i=1,\dots,p} |\underbrace{f^{-k}(\underbrace{f^{-p\cdot r}(\underbrace{f^{-p\cdot n}(u)}_{\in U_{\varepsilon_1^0}(\bar{u}_1)})}_{\in U_{\varepsilon_1^r}(\bar{u}_1)})}_{\in U_{\varepsilon_{p-k+1}^r}(\bar{u}_{p-k+1})} - \bar{u}_i|$$

$$\underset{i = p-k+1}{=} \varepsilon_{p-k+1}^r \leq \max\{\varepsilon_1^{r_0}, \dots, \varepsilon_p^{r_0}\} < \varepsilon \qquad \Longrightarrow u \in W^u(M)$$

⊛: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $r_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\max\{\varepsilon_1^{r_0}, \dots, \varepsilon_p^{r_0}\} < \varepsilon$. Nun setze $\tilde{N} := \tilde{N}(\varepsilon) := p\cdot N + p\cdot r_0(\varepsilon)$, dann gilt für alle $m = p\cdot n + p\cdot r + k \geq \tilde{N}$ (mit $n \geq N$, $r \geq r_0$, $k \in \{0,\dots,p-1\}$):

$\subseteq$: Sei $u \in W^u(M)$

$$\Longrightarrow u \in \mathbb{R}^m, \; \inf_{i=1,\dots,p} d(f^{-m}(u), \bar{u}_i) = \operatorname{dist}(f^{-m}(u), M) \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

Insbesondere gilt dann für die Teilfolge $m_k := p\cdot k$, dass sie gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, d.h.

$$\inf_{i=1,\dots,p} d(f^{-p\cdot k}(u), \bar{u}_i) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Da $\bar{u}_i$ Fixpunkte von f^{-p} sind, folgt

$$\Longrightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,p\} : d(f^{-p\cdot k}(u), \bar{u}_i) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,p\} : u \in W_p^u(\bar{u}_i)$$

$$\Longrightarrow u \in \bigcup_{i=1}^{p} W_p^u(\bar{u}_i)$$

Zu (ii):

Gegeben: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-ax+x^3\\ by\end{pmatrix}, \quad a=\frac{5}{4}, \; b=2$$

Lösung: Zu (ii.1):

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{!}{=} f^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\cdot(-a\cdot x+x^3)+(-a\cdot x+x^3)^3\\ b^2y\end{pmatrix} \quad \underline{\text{und}} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a^2-1)\cdot x-(a^3+a)\cdot x^3+3\cdot a^2x^5-3ax^7+x^9\\ (b^2-1)y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x\in\left\{0, \pm\sqrt{a-1}, \pm\sqrt{a+1}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4}}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-4}}\right\}$$

$$y=\begin{cases}0, & b\neq\pm1\\ \text{beliebig}, & b=\pm1\end{cases}$$

Komplex!

Für $a=\frac{5}{4}$ und $b=2$ erhalten wir

$$x=0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{10-2i\sqrt{39}}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{10+2i\sqrt{39}}$$

$$y=0$$

Die Punkte $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\pm\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$ sind Fixpunkte

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}\pm\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$$

Insbesondere sind diese Fixpunkte instabil, denn:

$$Df\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+3x^2 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}+3x^2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\pm\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}\right\}: \; \rho\left(Df\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\geq 2>1$$

Die Punkte $\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ bilden einen 2-periodischen Orbit $\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}}_{=:\bar{u}_1},\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}}_{=:\bar{u}_2}\right\}$

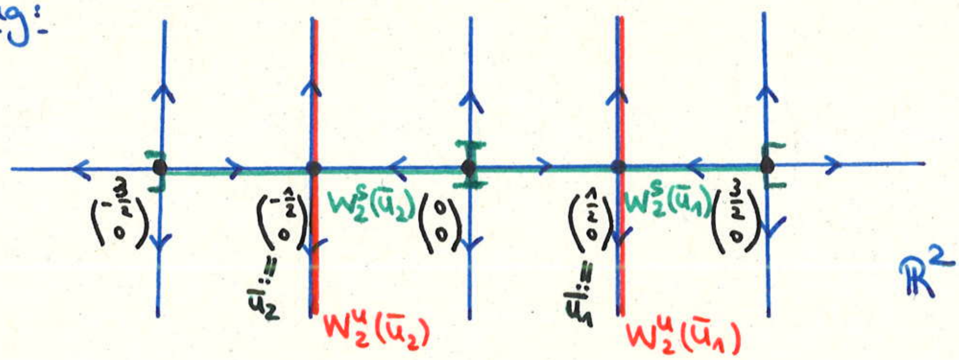
$$f\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, \quad f^2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

Insbesondere sind $\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ Fixpunkte von f^2 und diese sind instabil, denn

$$Df^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a^2)-3(a^3+a)x^2+15a^2x^4-21ax^6+9x^8 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$$

$$\rho\left(Df^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\geq 4>1 \quad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Abbildung:



$$W^u(\{\bar{u}_1,u_2\})=\bigcup_{i=1}^{2}W_2^u(\bar{u}_i)$$

$$W^s(\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\})=\bigcup_{i=1}^{2}W_2^s(\bar{u}_i)$$

Vorüberlegung & Angabe der Mengen:

zu (ii.2):

$$\boxed{\begin{aligned} W_2^s(\bar{u}_1) &= \left]0, \tfrac{3}{2}\right[\\ W_2^s(\bar{u}_2) &= \left]-\tfrac{3}{2}, 0\right[\end{aligned}}$$

zu (ii.3):

$$\boxed{\begin{aligned} W_2^u(\bar{u}_1) &= \bar{u}_1 + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \mathbb{R}\end{pmatrix} \\ W_2^u(\bar{u}_2) &= \bar{u}_2 + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \mathbb{R}\end{pmatrix} \end{aligned}}$$

zu (ii.4):

$$\boxed{\begin{aligned} W^s(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}) &\overset{(i.1)}{=} \bigcup_{i=1}^{2} W_2^s(\bar{u}_i) = \left]-\tfrac{3}{2}, 0\right[\cup \left]0, \tfrac{3}{2}\right[= \left]-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right[\setminus \{0\} \\ W^u(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}) &\overset{(i.2)}{=} \bigcup_{i=1}^{2} W_2^u(\bar{u}_i) = \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \lambda\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda\in\mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \lambda\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda\in\mathbb{R}\right\} \end{aligned}}$$