Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 12
1.7.2011

Abgabe: Freitag, 8.7.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 33: Sei $(X, \mathbb{R}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}})$ ein glattes dynamisches System und sei $\bar{u}$ ein Fixpunkt von φ^t.
Zeigen Sie:

(a) $(X, \mathbb{Z}, (\psi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ mit $\psi(x) = \varphi^1(x)$ ist ein diskretes dynamisches System.

(b) Für $x \in X$ sind die Aussagen (b.1) und (b.2) äquivalent:

(b.1) $\varphi^t(x) \to \bar{u}$ für $t \to \infty$,

(b.2) $\psi^n(x) \to \bar{u}$ für $n \to \infty$.

(6 Punkte)

Aufgabe 34: Die folgenden Fragen wiederholen Teile der Vorlesung und sind auch zur Prüfungsvorbereitung empfohlen.

(1) Ordnen Sie durch Angabe von X, Π, $(\varphi^t)_{t\in\Pi}$ die folgenden Systeme in den Kontext der dynamischen Systeme ein:

(1.1) Differenzengleichungen,

(1.2) Differentialgleichungen,

(1.3) symbolische Systeme,

(1.4) die Wärmeleitungsgleichung.

(2) Sei $(X, \Pi, (\varphi^t)_{t\in\Pi})$, $\Pi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ ein dynamisches System. Geben Sie Zusammenhänge zwischen den folgenden Begriffen an:

- invariante Menge,
- ω-Limesmenge eines Punktes,
- ω-Limesmenge einer Menge,
- asymptotisch stabile Menge,
- Attraktor,
- lokal stabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes,
- global stabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Gegeben sei die Differentialgleichung $u' = f(u)$, und deren Diskretisierung mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren.

(3.1) Warum bleiben Gleichgewichte unter dieser Diskretisierung erhalten ?

(3.2) Sei u der Startpunkt eines Orbits des kontinuierlichen Systems, der gegen ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht $\bar{u}$ konvergiert. Konvergiert dann auch die Diskretisierung für diesen Startwert gegen $\bar{u}$? Geben Sie eine präzise Fehlerabschätzung an.

(3.3) Kann das entsprechende Verhalten auch in der Nähe eines Sattels nachgewiesen werden ?

(4)

(4.1) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} u, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0, \quad \mathrm{Re}(\mu) \neq 0.$$

Geben Sie die stabile und instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes 0 in Abhängigkeit von λ und μ an.

(4.2) Warum werden lokal und global stabile Mannigfaltigkeiten unterschieden ?

(4.3) Beschreiben Sie die lokal bzw. global stabile Mannigfaltigkeit eines asymptotisch stabilen Fixpunktes.

(4.4) Wie kann die Dimension des stabilen Unterraums in zeit-diskreten und in kontinuierlichen Systemen präzise angegeben werden ?

(12 Punkte)

Aufgabe 33:

Gegeben: • $(X, \mathbb{R}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}})$ glattes DS , (X,d) metr. Raum

• $\varphi^t(\bar{u}) = \bar{u} \ \forall t\in\mathbb{R}$, d.h. $\bar{u}$ Fixpunkt von φ^t

Aufgabe: (a): $(X, \mathbb{Z}, (\psi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ mit $\psi(x) := \varphi^1(x)$ ist diskretes DS

(b): Sei $X = \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie für $x \in X = \mathbb{R}^m$ die äquivalenz der folgenden Aussagen:

(b.1): $\varphi^t(x) \longrightarrow \bar{u}$, $t \to \infty$ $(t\in\mathbb{R})$

(b.2): $\psi^n(x) \longrightarrow \bar{u}$, $n \to \infty$ $(n\in\mathbb{Z})$

Lösung:

zu (a):

• X metrischer Raum ($\Rightarrow X$ topologischer Raum)

• $(\mathbb{R}, +)$ Halbgruppe

• $\psi^0(x) := \varphi^0(x) = x \ \forall x\in X$

• $$\psi^{s+t}(x) = (\psi\circ\cdots\circ\psi)(x) = (\underbrace{\varphi\circ\cdots\circ\varphi}_{s+t \text{ mal}})(x) = \varphi^{s+t}(x) = \varphi^s(\varphi^t(x)) = \psi\circ\cdots\circ\psi((\psi\circ\cdots\circ\psi)(x)) = \psi^s(\psi^t(x))$$
$\forall s,t\in\mathbb{Z} \ \forall x\in X$

zu (b):

• (b.1) $\Rightarrow$ (b.2): Es gelte $\varphi^t(x) \longrightarrow \bar{u}$ für $t \xrightarrow{t\in\mathbb{R}} \infty$, d.h. (definitionsgemäß)

$$\forall (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ mit } t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty : d(\varphi^{t_k}(x), \bar{u}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Insbesondere gilt also (wegen $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$)

$$\forall (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z} \text{ mit } n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty : d(\underbrace{\varphi^{n_k}(x)}_{=(\underbrace{\varphi\circ\cdots\circ\varphi}_{n_k \text{ mal}})(x) = \psi^{n_k}(x)}, \bar{u}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

d.h. $\psi^n(x) \longrightarrow \bar{u}$ für $n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \infty$.

• (b.2) $\Rightarrow$ (b.1): Es gelte $\psi^n(x) \longrightarrow \bar{u}$ für $n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \infty$, d.h. (definitionsgemäß)

$$\forall (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z} \text{ mit } n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty : d(\psi^{n_k}(x), \bar{u}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Folge mit $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Dann gilt

$$\forall t_k \ (k\in\mathbb{N}) \ \exists_1 r_k \in [0,1[\ : \ t_k = \underbrace{\lfloor t_k \rfloor}_{\text{Folge natürlicher Zahlen}} + \underbrace{r_k}_{\text{in } [0,1[\text{ beschränkte Folge (reeller Zahlen)}}$$

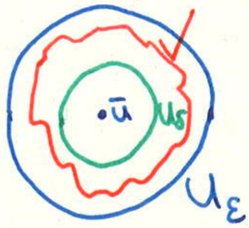
zz: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall k \geq N : d(\varphi^{t_k}(x), \bar{u}) \leq \varepsilon$

Hilfslemma:

$$\forall U = U(\bar{u}) \overset{X=\mathbb{R}^m}{\subseteq} \ \exists V = V(\bar{u}) \subseteq U : \varphi^t(x) \in U \ \forall x\in V \ \forall t\in[0,1]$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert (nach dem Hilfslemma) zu der Umgebung $U_\varepsilon(\bar{u})$ eine Umgebung $V = V(\bar{u}, \varepsilon) \subseteq U$, so dass $\varphi^t(x) \in U_\varepsilon(\bar{u})$ gilt, insofern $x \in V$ und $t \in [0,1]$ ist.

Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta = U_\delta(\bar{u}) \subset V$. Wegen der diskreten Konvergenz gilt nun



$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N: d(\varphi^{\lfloor t_k \rfloor}(x), \bar{u}) \leq \delta$$

d.h. $\varphi^{\lfloor t_k \rfloor}(x) \in U_\delta(\bar{u}) \subset V$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & d(\varphi^{t_k}(x), \bar{u}) \\
&= d(\varphi^{\lfloor t_k \rfloor + r_k}(x), \bar{u}) \\
&= d(\underbrace{\varphi^{r_k}(\underbrace{\varphi^{\lfloor t_k \rfloor}(x)}_{= \varphi^{\lfloor t_k \rfloor}(x) \in U_\delta \subset V \ \forall k \geq N})}_{\in U_\varepsilon(\bar{u}) \ \forall k \geq N}, \bar{u}) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq N
\end{aligned}$$

da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt $\varphi^{t_k}(x) \to \bar{u}$ für $k \to \infty$. Da zudem die Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beliebig gewählt wurde, gilt $\varphi^t(x) \to \bar{u}$ für $t \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Beweis (Hilfslemma): Sei $U = U(\bar{u})$ eine beliebige Umgebung von $\bar{u}$.

Da φ auf $X \times \mathbb{R}$ stetig und $X = \mathbb{R}^m$ endlich dimensional ist, folgt, dass φ auf dem Kompaktum $\bar{U} \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,t), (y,s) \in \bar{U} \times [0,1] \text{ mit } \|x-y\| + |t-s| \leq \delta:$$
$$\|\varphi^t(x) - \varphi^s(y)\| \leq \varepsilon$$

Speziell für $y = \bar{u}$ bedeutet dies

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \bar{U},\ s,t \in [0,1] \text{ mit } \|x - \bar{u}\| + \|t-s\| \leq \delta:$$
$$\|\varphi^t(x) - \underbrace{\varphi^s(\bar{u})}_{= \varphi^t(\bar{u})}\| \leq \varepsilon$$

d.h. für $s = t$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \bar{U},\ t \in [0,1] \text{ mit } \|x - \bar{u}\| \leq \delta:$$
$$\underbrace{\|\varphi^t(x) - \underbrace{\varphi^t(\bar{u})}_{= \bar{u}}\|}_{= \|\varphi^t(x) - \bar{u}\|} \leq \varepsilon$$

d.h. $\varphi^t(x) \in \underbrace{B_\varepsilon(\bar{u})}_{=: U} \ \forall t \in [0,1] \ \forall x \in \underbrace{B_\delta(\bar{u})}_{=: V}$

Aufgabe 34: Diese Aufgabe wird ausschließlich im Tutorium besprochen. L3