Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 1
8.4.2011

Abgabe: Freitag, 15.4.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Berechnung einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

mit Startwerten im Intervall $I = [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Bestimmen Sie hierzu maximale Teilintervalle $I_n \subset I$, $n \in \mathbb{Z}$, so dass das Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 \in I_n$ gegen die Nullstelle $n\pi$ konvergiert. Geben Sie die Teilintervalle I_n für $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ explizit an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Skizzieren Sie für die folgenden linearen Differential- bzw. Differenzengleichungen charakteristische Phasenbilder und geben Sie die zugehörigen Evolutionsoperatoren an.

(a)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(b)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(c)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

(d)
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

(e)
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

(f)
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Gegeben sei ein nichtautonomes dynamisches System $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^{t,s}\})$, wobei

$$\varphi^{t,s} : X \to X$$

für $s,\ t - s \in \mathbb{T}$ definiert sind und die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\varphi^{t,t} = \mathrm{Id} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}, \tag{D1'}$$

$$\varphi^{t,s} \circ \varphi^{s,r} = \varphi^{t,r} \quad \forall\, t - s, s - r, r \in \mathbb{T}. \tag{D2'}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\Phi^t(\tau, u) = \big(t + \tau, \varphi^{t+\tau,\tau}(u)\big), \quad (\tau, u) \in \mathbb{T} \times X,\ t \in \mathbb{T},$$

ein dynamisches System auf $\mathbb{T} \times X$ erzeugt wird (Autonomisierung).
Wie hängen im kontinuierlichen, differenzierbaren Fall mit $X = \mathbb{R}^m$ die infinitesimalen Erzeuger von $\varphi^{t,s}$ und Φ^t zusammen?

(6 Punkte)