Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 2
15.4.2011

Abgabe: Freitag, 29.4.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 4: Sei $N \in \mathbb{N}$ und S_N die Menge der biunendlichen Folgen mit Symbolen aus

$$\{0, \ldots, N-1\} =: [N],$$

d. h.

$$S_N = [N]^{\mathbb{Z}} = \big\{ u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}} : u_i \in \{0, \ldots, N-1\} \big\}.$$

Zeigen Sie, dass (S_N, d) mit

$$d(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - v_i| 3^{-|i|}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist und dass der Verschiebeoperator (Shift)

$$\big(\varphi(u)\big)_i = u_{i+1}, \quad u \in S_N, \quad i \in \mathbb{Z}$$

ein diskretes, invertierbares und stetiges dynamisches System $(S_N, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n \in \mathbb{Z}})$ definiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $(X, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t \in \mathbb{T}})$ ein separat stetiges dynamisches System und seien $\#X > 1$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Dann gilt für alle $u \in X$ eine der folgenden Alternativen:

(i) $\gamma(u)$ ist schließlich fix, d. h. es existiert ein $s \in \mathbb{T}$ mit $\varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^s(u)$ für alle $t \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$.

(ii) $\gamma(u)$ ist schließlich periodisch, d. h. es existiert ein $s \in \mathbb{T}$, so dass $\gamma(\varphi^s(u))$ ein periodischer Orbit ist.

(iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &\to X \\ t &\mapsto \varphi^t(u) \end{aligned}$$

ist injektiv.

(6 Punkte)

Aufgabe 6: Gegeben sei das durch die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{mit} \quad f(u) = \lambda u(1-u), \quad n \in \mathbb{N}$$

erzeugte dynamische System auf $X = [0, 1]$.

(a) Beweisen Sie, dass f auf X eine Selbstabbildung für $\lambda \in [1, 4]$ ist.

(b) Für welche $\lambda \in [1, 4]$ besitzt das dynamische System einen zwei-periodischen Orbit $\{u_-(\lambda), u_+(\lambda)\}$?

(c) Geben Sie $\{u_-(\lambda), u_+(\lambda)\}$ für $\lambda = \frac{10}{3}$ explizit an.

(d) Zeigen Sie, dass die Iteration zum Startwert $u_0 = 1 - u_-(\lambda)$ schließlich zwei-periodisch wird.

(6 Punkte)

Aufgabe 7: Gegeben seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit

$$(f(u), u)_2 \leq \alpha - \beta \, ||u||_2^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

wobei $(\cdot, \cdot)_2$ das euklidische innere Produkt bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass es ein R_0 gibt, so dass die Kugeln

$$K_R = \{u \in \mathbb{R}^m : ||u||_2 \leq R\}$$

für $R \geq R_0$ positiv invariant für das durch $\dot{u} = f(u)$ erzeugte (lokale) dynamische System sind.

(b) Beweisen Sie, dass es zu jedem $R \geq R_0$ ein $h_0 = h_0(R) > 0$ gibt, so dass K_R auch für die Euler Abbildung

$$\Phi_h(u) = u + h \, f(u), \; 0 < h \leq h_0$$

positiv invariant ist. Kann man h_0 stets unabhängig von R wählen?

(6 Punkte)