Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 3
29.4.2011

Abgabe: Freitag, 6.5.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 8: Gegeben sei das durch

$$\varphi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^3 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

erzeugte diskrete dynamische System $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, \{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}})$.
Bestimmen Sie die ω-Limesmenge

$$\omega(u) = \{v \in X : \exists\, n_k \in \mathbb{N}, (k \in \mathbb{N}), n_k \to \infty, \varphi^{n_k}(u) \to v \text{ für } k \to \infty\}$$

für jedes $u \in X := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

(6 Punkte)

Aufgabe 9: Man betrachte das symbolische dynamische System aus Aufgabe 4.

(i) Zeigen Sie, dass es ein $u \in S_N$ gibt, dessen ω–Limesmenge ganz S_N ist, d. h.

$$\omega(u) = S_N.$$

(ii) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und periodischen Orbits. Sind diese stabil bzw. anziehend?

(6 Punkte)

Aufgabe 10: Gegeben sei das zeitdiskrete dynamische System

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy \\ y^2 + 2yz \\ z^2 + 2xz \end{pmatrix}$$

auf

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Selbstabbildung auf X ist.

(b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von f.

(c) Führen Sie numerische Tests durch, um für „charakteristische“ $u \in X$ eine Vermutung über die ω-Limesmenge $\omega(u)$ zu erhalten. (Eine formale Beantwortung dieser nicht-trivialen Frage ist nicht Gegenstand dieser Aufgabe.)

Hinweis: Numerische Tests zeigen, dass die zwei-dimensionale Fläche X bei einer Simulation im $\mathbb{R}^3$ instabil und somit *„numerisch nicht invariant“* ist.

Ausweg: Man projiziere das System in die (x, y)-Ebene mittels

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix}, \quad \text{da} \quad z = 1 - x - y$$

und betrachte die Abbildung F auf

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1 \right\}.$$

Treffen Sie zusätzlich Vorkehrungen, falls die berechneten Orbits die Menge Y – aufgrund von Rundungsfehlern – verlassen.

(6 Punkte)