Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 4
6.5.2011

Abgabe: Freitag, 13.5.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 11: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) \cdot \cos(4u_2) \\ \cos(u_2^3) \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie ein Programm, das in $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ alle Gleichgewichte der obigen Differentialgleichung einzeichnet. Hierbei sind anziehende Gleichgewichte in grün und nicht-anziehende Gleichgewichte in rot zu markieren.

(6 Punkte)

Aufgabe 12: Ein Modell einer Futterkette mit drei Spezies u_1, u_2, u_3 (u_3 frisst u_2, u_2 frisst u_1, u_1 wächst ständig nach) wird durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1), \\ \dot{u}_2 &= -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2), \\ \dot{u}_3 &= -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2) \end{aligned}$$

mit

$$f_i(v) = \frac{v}{a_i + b_i v}, \; i = 1, 2 \text{ und positiven Parametern } \alpha, a_1, b_1, a_2, b_2$$

beschrieben.

- Zeigen Sie, dass die Hyperebene

  $$H = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 + u_3 = 1 \right\}$$

  asymptotisch stabil ist. Wie verhält sich das Vektorfeld auf dem Rand des Dreiecks $D = H \cap \mathbb{R}^3_+$?

- Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von α – alle Fixpunkte des zugehörigen dynamischen Systems im $\mathbb{R}^3_+$.

- Diskutieren Sie – in Abhängigkeit von α – (asymptotische) Stabilität des Fixpunktes $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0)$ (es überlebt nur Spezies 1).

(6 Punkte)

Aufgabe 13: Die folgenden Aussagen liefen eine Erweiterung von Satz 6.1.

(a) Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$. Beweisen Sie die Implikation (i)$\Rightarrow$(ii) für die folgenden Aussagen.

(i) Es existiert eine symmetrische und positiv definite Matrix $H \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $\alpha > 0$ mit

$$\langle u, Au \rangle_H \leq -\alpha \langle u, u \rangle_2$$

für alle $u \in \mathbb{R}^m$.
Hier bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das euklidische innere Produkt und

$$\langle u, v \rangle_H := \langle u, Hv \rangle_2.$$

(ii) $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

(b) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, auf die die Aussage (ii) zutrifft, nicht aber die Aussage (i) für $H = \mathrm{Id}_2$.

Hinweise:

(i)$\Rightarrow$(ii): Verwenden Sie Satz 6.1 und weisen Sie asymptotische Stabilität unter Verwendung des Gronwall-Lemmas (vgl. Numerik II, Aufgabe 6) nach. Diskutieren Sie hierzu $\varphi^t(u) = e^{tA}u$ in der Norm

$$\|u\|_H := \sqrt{\langle u, u \rangle_H}.$$

zu (b): Man wähle A so, dass $A + A^T$ einen positiven Eigenwert besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 14:** Zeigen Sie (unter der zusätzlichen Annahme $\lambda \in \mathbb{R}$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$), dass in Aufgabe 13(a) auch die Rückrichtung (i)$\Leftarrow$(ii) gilt.

Hinweis:

(i)$\Leftarrow$(ii): Man betrachte zunächst obere Dreiecksmatrizen $A \in \mathbb{C}^{m,m}$ ($A_{ij} = 0$ für $i > j$, $\mathrm{Re}(A_{ii}) < 0\ \forall i = 1, \ldots, m$) und suche eine geeignete Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}^{m,m}$ und ein $\beta > 0$ mit

$$\mathrm{Re}(\bar{u}^T D^{-1} A D u) \leq -\beta \|u\|_2^2 \qquad \forall u \in \mathbb{C}^m.$$

Dann verwende man $H = QD^{-2}\bar{Q}^T$, wobei Q die Transformationsmatrix auf die Schursche-Normalform (vgl. Numerik I) bezeichnet. Reduzieren Sie so den allgemeinen Fall auf den Fall oberer Dreiecksmatrizen.

(6 Bonuspunkte)