Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 5
13.5.2011

Abgabe: Freitag, 20.5.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 15: Sei $(\mathbb{R}^m, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}})$ ein stetiges dynamisches System.

- Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ heißt **global anziehend**, falls

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi^t(v), M) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig und sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein k-periodischer Orbit des durch φ erzeugten diskreten dynamischen Systems $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Beweisen Sie die folgende Aussage:

- Ist die Menge $M = \{u_1, \ldots, u_k\}$ stabil und global anziehend, so folgt $k = 1$, d. h. nur Fixpunkte können stabil und global anziehend sein.

(6 Punkte)

Aufgabe 16: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1 - u_1^2 - u_2^2) \\ u_1 + u_2(1 - u_1^2 - u_2^2) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Transformieren Sie das System (1) mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$(u_1, u_2) = P(r, \theta) := r(\cos\theta, \sin\theta)$$

auf

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(b) Welche Beziehung besteht zwischen den Flüssen φ^t von (1) und ψ^t von (2) ?

(c) Zeigen Sie, dass (1) eine asymptotisch stabile periodische Lösung besitzt, die aus einem Kreis vom Radius R ($R =?$) besteht.

(d) Besitzt dieses System (unzerlegbare) Attraktoren ?

(6 Punkte)

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Approximation der Lösungen von (1) mit dem expliziten Euler-Verfahren

$$\Phi_{\Delta t}(u) = u + \Delta t f(u), \quad 0 < \Delta t < 1. \tag{3}$$

(i) Leiten Sie aus der Gleichung

$$\Phi_{\Delta t}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\rho\cos\gamma, \rho\sin\gamma)$$

eine Beziehung der Form $\rho = g_{\Delta t}(r)$ her.

(ii) Zeigen Sie, dass (3) zwei invariante Kreise mit Radien $R_-(\Delta t)$, $R_+(\Delta t)$ besitzt.

(iii) Wie verhält sich

$$R_\pm(\Delta t) \text{ für } \Delta t \longrightarrow 0\,?$$

► Alternativ können Sie diese Untersuchungen auch numerisch durchführen. ◄

(6 Punkte)