Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls — Übungsblatt 7
Dipl.-Math. Denny Otten — 27.5.2011

Abgabe: Freitag, 3.6.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 21: Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in \mathcal{L}^2(0,1). \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass diese Differentialgleichung die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\ k^2\pi^2}\ c_k^0 v_k(x), \quad v_k(x) = \sqrt{2}\ \sin(k\pi x)$$

besitzt.

(i) Diskutieren Sie durch (formale) Reihenentwicklung das implizite Euler-Verfahren.

Die Approximation $u^n(x)$ für $u(x, n\Delta t)$ ergibt sich für $n = 1, 2, \ldots$ rekursiv aus der Anfangs-Randwertaufgabe

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u^{n+1} - u^n) = u_{xx}^{n+1}, \quad u^{n+1}(0) = u^{n+1}(1) = 0, \quad u^0 := u_0.$$

Ausgehend von der Reihenentwicklung

$$u^0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 v_k, \quad c_k^0 = \langle u_0, v_k \rangle_2$$

bestimme man die Koeffizienten c_k^n, so dass u^n die Darstellung

$$u^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n v_k$$

besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass man im Fall $u_0(x) = \min(x, 1-x)$ die Fourierkoeffizienten

$$c_k^0 = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{k^2\pi^2}(-1)^l & \text{, falls } k = 2l+1, \\ 0 & \text{, falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

erhält.

(iii) Zeichnen Sie für $x \in [0 : 0.01 : 1]$ und $K = 51$ die Partialsummen

$$u_K(x,t) = \sum_{k=1}^{K} e^{-tk^2\pi^2} c_k^0 v_k(x) \quad \text{für} \quad t \in [0 : 0.01 : 1]$$

und

$$u_K^n(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k^n v_k(x) \text{ für } \Delta t = \frac{1}{2},\ n \in \{0,1,2\}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta t = \frac{1}{100},\ n \in \{0, \ldots, 100\}.$$

(9 Punkte)

Aufgabe 22:

(A) Gegeben seien:

$$u_n(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right], \\ 1 - \frac{1}{2n} - 2n\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right), \\ 2(1-x), & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

und

$$u(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2(1-x), & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(A1) Berechnen Sie die erste (schwache) Ableitung von u_n, $n \in \mathbb{N}$ und von u.

(A2) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} u_n &\in \mathcal{C}^1(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u &\in \mathcal{C}(0,1), \\ u &\notin \mathcal{C}^1(0,1). \end{aligned}$$

(A3) Beweisen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der H^1-Norm gegen u konvergiert, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{1,2} = 0.$$

(B) Konstruieren Sie eine Funktion

$$u \in \mathcal{C}^\infty(0,1) \cap H_0^2(0,1)$$

mit

$$u \notin H_0^3(0,1).$$

(9 Punkte)