Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 8
3.6.2011

Abgabe: Freitag, 10.6.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 23:

(a) Analog zu dem in der Vorlesung diskutierten Fall der Dirichletrandbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

definiere man ein geeignetes dynamisches System

$$\left(\mathcal{L}^2(0,1), \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$$

zu der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} \ \text{ in } \ (0,1)\times\mathbb{R}_+,\\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x\in[0,1],\\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie (unter der Annahme, dass Funktionen in $\mathcal{L}^2(0,1)$ sich nach den Eigenfunktionen entwickeln lassen), dass das in Teil (a) definierte dynamische System stetig ist.

(c) Beweisen Sie für alle $t > 0$ die Identität

$$\|\varphi^t - I\|_2 = \sup_{\|u\|_2\le 1} \|\varphi^t(u) - u\|_2 = 1.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 24: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = u^2 - 1. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichte von (1).

Berechnen Sie – in Abhängigkeit von der Schrittweite Δt – die Gleichgewichte von Approximationen der Differentialgleichung (1) mit den folgenden Einschrittverfahren (vgl. Numerik II-Skript):

(b) explizites Euler-Verfahren,

(c) implizites Euler-Verfahren,

(d) Methode von Heun,

(e) verbessertes Polygonzugverfahren.

(6 Punkte)

Aufgabe 25: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = u(1-u)(1+u). \tag{2}$$

Es sollen die Gleichgewichte der Approximation von (2) mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, vgl. Numerik II-Skript, untersucht werden.

Schreiben Sie hierzu ein Programm, dass sämtliche reelle Gleichgewichte für die Schrittweiten

$$\Delta t \in \left\{10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}\right\}$$

ausgibt.

(6 Punkte)