Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 9
10.6.2011

Abgabe: Freitag, 17.6.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 26: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = 4u(1-u)(1+u). \tag{1}$$

(a) Geben Sie sämtliche Gleichgewichte von (1) und deren Stabilitätsverhalten an.

(b) Bestimmen Sie eine maximale Schrittweite Δt, so dass die Gleichgewichte bei Diskretisierung mit dem **expliziten Euler-Verfahren** das gleiche Stabilitätsverhalten zeigen.

(c) Führen Sie die zu (b) entsprechende Analyse für das **implizite Euler-Verfahren** durch. Beachten Sie, dass die Rückwärts-Iteration explizit angegeben werden kann, Invertierbarkeit aber nur für hinreichend kleine Schrittweiten gewährleistet ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 27:

(i) Schreiben Sie ein Programm, das bei Diskretisierung der Differentialgleichung (1) mit dem **klassischen Runge-Kutta-Verfahren** die maximal zulässige Schrittweite angibt, für die das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichte erhalten bleibt.

(ii) Illustrieren Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 26 (b), (c) und aus Aufgabenteil (i) unter Verwendung der entsprechenden NumLab-Gui.

(6 Punkte)

Aufgabe 28: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m,$$

und ein (implizites) k-Schrittverfahren der Form

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u^{j+\nu} = \Psi(u^j, \ldots, u^{j+k}, \Delta t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Anfangsdaten:} \quad & u^0, \ldots, u^{k-1} \in \mathbb{R}^m, \\ \text{Koeffizienten:} \quad & a_\nu, \quad \nu = 0, \ldots, k, \quad a_k \neq 0, \\ \text{Verfahrensfunktion:} \quad & \Psi : \mathbb{R}^{(k+1)m} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

(A) Zeigen Sie, dass durch das Mehrschrittverfahren ein diskretes dynamisches System $(\mathbb{R}^{km}, \mathbb{N}_0, \Phi_{\Delta t})$ erzeugt wird.

- Führen Sie hierzu die Vektoren $U^j = (u^j, \ldots, u^{j+k-1})^T \in \mathbb{R}^{km}$ ein und schreiben Sie das Mehrschrittverfahren als

$$U^{j+1} = \Phi_{\Delta t}(U^j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

  Die Abbildung $\Phi_{\Delta t} : \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}$ ist dabei (implizit) durch das Lösen einer Gleichung der Form

$$U^{j+1} = (A \otimes I_m)U^j + \Delta t F(\Delta t, U^j, U^{j+1}),$$

  mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ und der nichtlinearen Funktion

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{km} \times \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}$$

  gegeben. Hierbei bezeichnet $\otimes$ das Kroneckerprodukt.

- Bestimmen Sie eine geeignete Wahl für A und F.

(B) Welche Form hat die Abbildung F im Fall eines linearen Mehrschrittverfahrens ?

(C)
- Welche Form haben Fixpunkte von (2) ?
- Wie lassen sich für ein konsistentes lineares Verfahren die Fixpunkte von $\Phi_{\Delta t}$ mit Hilfe von Ψ bestimmen ?

  Zeigen Sie zunächst, dass ein konsistentes lineares Mehrschrittverfahren die Bedingung $\sum_{\nu=0}^{k} a_k = 0$ erfüllt, vgl. Numerik II.

(6 Punkte)