Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 11
24.6.2011

Abgabe: Freitag, 1.7.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 31: Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ein Diffeomorphismus, $f(\bar{u}) = \bar{u}$ und U eine Umgebung von $\bar{u}$.

(a) Seien $W_U^s(\bar{u})$ und $W^s(\bar{u})$ die lokal- bzw. global stabile Menge des Fixpunktes $\bar{u}$ des zeitdiskreten dynamischen Systems

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

$$W^s(\bar{u}) = \bigcup_{n \leq 0} f^n(W_U^s(\bar{u})).$$

(b) Geben Sie die entsprechende Bedingung für die instabile Menge (mit Beweis) an.

(c) Wie kann ein entsprechender Zusammenhang zwischen global- und lokal stabilen Mengen für das kontinuierliche System

$$u' = f(u)$$

angegeben werden ?

(d) Sei A eine asymptotisch stabile Menge (vgl. Abschnitt 6) und sei $\bar{u} \in A$ ein Gleichgewicht des zugehörigen kontinuierlichen bzw. diskreten dynamischen Systems.

Diskutieren Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen:

(d.1) $W^s(\bar{u}) \subset A$,

(d.2) $W^s(\bar{u}) \supset A$,

(d.3) $W^u(\bar{u}) \subset A$.

(e) Illustrieren Sie die wahren Aussagen aus Aufgabenteil (d) anhand einer Skizze.

(f) Bestimmen Sie die stabilen und instabilen Mengen der Fixpunkte des symbolischen dynamischen Systems aus Aufgabe 4.

(9 Punkte)

Aufgabe 32:

(i) Gegeben sei das durch den glatten Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ erzeugte zeitdiskrete dynamische System. Sei $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p$ ein p-periodischer Orbit und sei $M = \{\bar{u}_1, .., \bar{u}_p\}$.

Wir definieren die global stabile und instabile Menge dieses periodischen Orbits mittels

$$\begin{aligned} W^s(M) &= \{u \in \mathbb{R}^m : \mathrm{dist}(f^n(u), M) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}, \\ W^u(M) &= \{u \in \mathbb{R}^m : \mathrm{dist}(f^n(u), M) \to 0 \text{ für } n \to -\infty\}. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, \dots, p\}$, dann ist $\bar{u}_i$ offensichtlich ein Fixpunkt von

$$f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ mal}}.$$

Wir bezeichnen die stabile bzw. instabile Mengen des Fixpunktes $\bar{u}_i$ bezüglich der Abbildung f^p mit $W_p^{s,u}(\bar{u}_i)$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(i.1) $W^s(M) = \bigcup_{i=1}^p W_p^s(\bar{u}_i)$,

(i.2) $W^u(M) = \bigcup_{i=1}^p W_p^u(\bar{u}_i)$.

(ii) Konkret betrachten wir die Abbildung

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}x + x^3 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

(ii.1) Bestimmen Sie einen zwei-periodischen Orbit $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ von f.

Geben Sie die folgenden Mengen an:

(ii.2) $W_2^s(\bar{u}_1)$, $W_2^s(\bar{u}_2)$,

(ii.3) $W_2^u(\bar{u}_1)$, $W_2^u(\bar{u}_2)$,

(ii.4) $W^s(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$, $W^u(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$.

Erstellen Sie eine Abbildung.

(9 Punkte)