Übungen zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2011

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 12
1.7.2011

Abgabe: Freitag, 8.7.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 33: Sei $(X, \mathbb{R}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}})$ ein glattes dynamisches System und sei $\bar{u}$ ein Fixpunkt von φ^t.
Zeigen Sie:

(a) $(X, \mathbb{Z}, (\psi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ mit $\psi(x) = \varphi^1(x)$ ist ein diskretes dynamisches System.

(b) Für $x \in X$ sind die Aussagen (b.1) und (b.2) äquivalent:

(b.1) $\varphi^t(x) \to \bar{u}$ für $t \to \infty$,

(b.2) $\psi^n(x) \to \bar{u}$ für $n \to \infty$.

(6 Punkte)

Aufgabe 34: Die folgenden Fragen wiederholen Teile der Vorlesung und sind auch zur Prüfungsvorbereitung empfohlen.

(1) Ordnen Sie durch Angabe von X, Π, $(\varphi^t)_{t\in\Pi}$ die folgenden Systeme in den Kontext der dynamischen Systeme ein:

(1.1) Differenzengleichungen,

(1.2) Differentialgleichungen,

(1.3) symbolische Systeme,

(1.4) die Wärmeleitungsgleichung.

(2) Sei $(X, \Pi, (\varphi^t)_{t\in\Pi})$, $\Pi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ ein dynamisches System. Geben Sie Zusammenhänge zwischen den folgenden Begriffen an:

- invariante Menge,
- ω-Limesmenge eines Punktes,
- ω-Limesmenge einer Menge,
- asymptotisch stabile Menge,
- Attraktor,
- lokal stabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes,
- global stabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Gegeben sei die Differentialgleichung $u' = f(u)$, und deren Diskretisierung mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren.

(3.1) Warum bleiben Gleichgewichte unter dieser Diskretisierung erhalten ?

(3.2) Sei u der Startpunkt eines Orbits des kontinuierlichen Systems, der gegen ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht $\bar{u}$ konvergiert. Konvergiert dann auch die Diskretisierung für diesen Startwert gegen $\bar{u}$? Geben Sie eine präzise Fehlerabschätzung an.

(3.3) Kann das entsprechende Verhalten auch in der Nähe eines Sattels nachgewiesen werden ?

(4)

(4.1) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} u, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0, \quad \mathrm{Re}(\mu) \neq 0.$$

Geben Sie die stabile und instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes 0 in Abhängigkeit von λ und μ an.

(4.2) Warum werden lokal und global stabile Mannigfaltigkeiten unterschieden ?

(4.3) Beschreiben Sie die lokal bzw. global stabile Mannigfaltigkeit eines asymptotisch stabilen Fixpunktes.

(4.4) Wie kann die Dimension des stabilen Unterraums in zeit-diskreten und in kontinuierlichen Systemen präzise angegeben werden ?

(12 Punkte)