

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen

PD Dr. Thorsten Hüls
Department of Mathematics
Bielefeld University
33501 Bielefeld
Germany
office: V5-138
phone: +49 (0)521 106 4785
e-mail: huels@math.uni-bielefeld.de

Conny Pearce


Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Department of Mathematics
Bielefeld University
33501 Bielefeld
Germany
office: V5-141
phone: +49 (0)521 106 4798
e-mail: beyn@math.uni-bielefeld.de

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
76131 Karlsruhe
Germany
office: 483 Röserhaus (01.86)
phone: +49 721 608 41632
e-mail: jens.rottman-matthes@kit.edu

Dipl. Math. Simon Dieckmann
Department of Mathematics
Bielefeld University
33501 Bielefeld
Germany
office: V5-142
phone: +49 (0)521 106 4786
e-mail: simon.dieckmann@uni-bielefeld.de

Dr. Denny Otten
Department of Mathematics
Bielefeld University
33501 Bielefeld
Germany
office: V5-134
phone: +49 (0)521 106 4784
e-mail: dotten@math.uni-bielefeld.de

8. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Einführung	3
1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen	3
1.2 Richtungsfeld und Phasenbild	6
1.3 Eine einfache Differentialgleichung	12
1.4 Anfangswertaufgaben und Lösungsbegriff	17
2 Lösungstheorie	19
2.1 Differential- versus Integralgleichung	19
2.2 Der Existenzsatz von Peano	20
2.3 Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf	22
2.4 Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf	34
2.5 Maximales Existenzintervall	37
3 Lösungsverhalten und Lösungsmethoden	43
3.1 Skalare autonome Differentialgleichungen	43
3.2 Trennung der Veränderlichen	48
3.3 Skalare lineare Differentialgleichungen	52
3.4 Das Newtonsche Gesetz der Abkühlung	56
3.5 Transformation von Differentialgleichungen	58
4 Numerische Lösung gewöhnlicher Anfangswertaufgaben	65
4.1 Einschrittverfahren	65
4.2 Das explizite Euler-Verfahren	66
4.3 Die Methode von Heun	72
4.4 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren	75
4.5 Das implizite Euler-Verfahren und die Newton-Methode	76
5 Differentialgleichungen höherer Ordnung und lineare Systeme	81
5.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung	81
5.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	84
5.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	91
5.3.1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung	91
5.4 Lineare Systeme 1. Ordnung	98
5.4.1 Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung	102
Literaturverzeichnis	109

Vorwort

Die Erstauflage des vorliegenden Skripts wurde vor einigen Jahren von PD. Thorsten Hüls mit Unterstützung von Conny Pearce angefertigt. In den darauffolgenden Jahren wurde das Skript von Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn, JProf. Jens Rottmann-Matthes und Dipl. Math. Simon Dieckmann weiter überarbeitet. Anschließend hat Dr. Denny Otten das Skript umgestaltet, erweitert und korrigiert. Zudem hat er größere Änderungen am Layout vorgenommen.

Literatur

Das Skript richtet sich stark an der englischsprachigen Quelle [5]. Dennoch möchten wir dem Leser mit [1], [2], [3] und [4] weitere sehr empfehlenswerte Quellen ans Herz legen.

Historische Entwicklung

Differentialgleichungen tauchten zuerst in mathematischen Modellen zur Beschreibung von Phänomenen aus den Bereichen der Physik und Mechanik auf, wie zum Beispiel in den Arbeiten von

- Newton 1643-1727 (Principia, 1687),
- Leibniz 1646-1716.

Das Ziel ist die Beschreibung von Vorgängen in der Natur, z. B.

- Fallgesetz für den Apfel,
- Beschreibung von Planetenbahnen.

Anwendungen finden sich in der Physik, Biologie, Chemie, den Wirtschaftswissenschaften und vielen mehr.

1 Einführung

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Problemstellung: Gegeben seien ein offenes, abgeschlossenes oder halboffenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, z. B. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$J = (a, b), [a, b], [a, b), (a, b], (a, \infty), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, \infty) = \mathbb{R},$$

und eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, v) \mapsto f(t, v) = \begin{pmatrix} f_1(t, v) \\ \vdots \\ f_n(t, v) \end{pmatrix}.$$

Gesucht wird nun eine Funktion

$$u : \mathbb{R} \supseteq J \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

die die folgende Gleichung erfüllt

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J. \quad (1.2)$$

In einer Vielzahl von Anwendungen bezeichnet die Variable $t \in J$ in (1.1) die **Zeit** und $u(t)$ den **Zustand** zum Zeitpunkt t . Die Gleichung (1.2) beschreibt nun eine Beziehung zwischen der Funktion u und seiner ersten Ableitung u' , und zwar zu jedem festen Zeitpunkt $t \in J$. Die Beziehung zueinander wird von der vorgegebenen Funktion f beschrieben. Man nennt die Gleichung (1.2) eine (**explizite**) **n -dimensionale gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung** und das Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ ein zugehöriges **Existenzintervall**. Hängt die Funktion f nicht von t ab sondern nur von v , d. h. $u'(t) = f(u(t))$ anstelle von (1.2), so nennen wir die Differentialgleichung (1.2) **autonom**, andernfalls **nicht-autonom**. Fügen wir der Gleichung (1.2) eine sogenannte **Anfangsbedingung** hinzu, z. B. $u(t_0) = u_0$ für einen **Anfangswert** $u_0 \in \mathbb{R}^n$ und einem **Anfangszeitpunkt** $t_0 \in J$, so erhalten wir die **Anfangswertaufgabe**

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t > t_0, \quad t \in J, \quad (1.3a)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (1.3b)$$

Einen präzisen mathematischen Lösungsbegriff für das Anfangswertproblem (1.3) werden wir erst später in Abschnitt 1.4 einführen.

Beispiel 1.1 (Radioaktiver Zerfall). Der **radioaktive Zerfall** (oder **Kernzerfall**) beschreibt in der Physik den Umwandlungsprozess, bei dem sich instabile Atomkerne spontan in andere Atomkerne umwandeln und dabei ionisierende Strahlung aussenden. Zu einer vorgegebenen Anzahl an instabilen Atomkernen stellt man sich die Frage, wie viele der instabilen Atomkerne zu einem bestimmten Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind. Dies lässt sich mit Hilfe einer Differentialgleichung beschreiben, die wir im Folgenden modellieren werden.

Gegeben sei eine radioaktive Substanzprobe mit einer Halbwertszeit $T_{1/2}$, d. h. nach der Zeit $T_{1/2}$ ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Substanzprobe übrig. Weiter bezeichne

$u(t)$: die Anzahl der nicht zerfallenden Atomkerne zur Zeit t ,

u_0 : die Anzahl der Atomkerne zum Anfangszeitpunkt t_0 ,

wobei wir $u_0 > 0$ voraussetzen. Das **Zerfallsgesetz** der Kernphysik besagt nun:

„Die Anzahl der zum Zeitpunkt t zerfallenden Atomkerne (also $u'(t)$)
ist proportional zu
der Anzahl der noch nicht zerfallenden Atomkerne (also $u(t)$).“

Mit dem Proportionalitätsfaktor $-k$ führt dies auf die Differentialgleichung

$$u'(t) = -ku(t), \quad (1.4)$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 0$ eine konstante **Zerfallsrate** der Substanzprobe bezeichnet. Hierbei ist (1.4) eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit $f(t, v) = -kv$ und $n = 1$. Berücksichtigen wir zusätzlich die Anzahl der Atomkerne u_0 zum Anfangszeitpunkt t_0 , so erhalten wir die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -ku(t), \quad t > t_0, \quad (1.5a)$$

$$u(t_0) = u_0 > 0. \quad (1.5b)$$

- a) Lösung der Anfangswertaufgabe: Eine Lösung der Anfangswertaufgabe (1.5) lautet

$$u(t) = e^{-k(t-t_0)}u_0, \quad t \geq t_0. \quad (1.6)$$

Als Nachweis dafür dient die **Probe**, bei der man die Lösung (1.6) auf beiden Seiten in die Gleichungen (1.5a) und (1.5b) einsetzt, um die Gültigkeit der Gleichungen direkt zu überprüfen: (Der Nachweis von (1.5a) erfordert Anwendung der Kettenregel)

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} [e^{-k(t-t_0)}u_0] = -k [e^{-k(t-t_0)}u_0] = -ku(t), \quad t > t_0, \\ u(t_0) &= e^{-k(t_0-t_0)}u_0 = e^0u_0 = u_0. \end{aligned}$$

- b) Eindeutigkeit der Lösung: Wir zeigen, dass die Lösung (1.6) der Anfangswertaufgabe (1.5) eindeutig ist. Sei v eine (weitere) Lösung von (1.5), d. h. v erfüllt

$$v'(t) = -kv(t), \quad t > t_0, \quad (1.7a)$$

$$v(t_0) = u_0 > 0, \quad (1.7b)$$

dann definieren wir $C(t) := e^{k(t-t_0)}v(t)$. Aus der Produktregel und (1.7a) erhalten wir

$$C'(t) = \frac{d}{dt} [e^{k(t-t_0)}v(t)] = e^{k(t-t_0)} [v'(t) + kv(t)] = 0.$$

Daraus folgt, dass die Funktion C konstant sein muss, d.h. $C(t) = c \in \mathbb{R}$ für alle $t \geq t_0$. Aus der Definition von $C(t)$ folgt daher $v(t) = e^{-k(t-t_0)}c$. Die Konstante c erhalten wir nun aus der Anfangsbedingung (1.7b), denn

$$c = C(t_0) = e^{k(t_0-t_0)}v(t_0) = v(t_0) = u_0.$$

Wir erhalten schließlich $v(t) = e^{-k(t-t_0)}u_0 = u(t)$, also die Eindeutigkeit der Lösung (1.6) von (1.5).

- c) Zusammenhang zwischen Zerfallsrate k und Halbwertszeit $T_{1/2}$: Die Definition der Halbwertszeit besagt (beachte: $u_0 > 0$)

$$\begin{aligned} e^{-kT_{1/2}}u_0 &= e^{-k(t_0+T_{1/2}-t_0)}u_0 = u(t_0 + T_{1/2}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}u(t_0) = \frac{1}{2}u_0 \\ \iff e^{-kT_{1/2}} &= \frac{1}{2} \iff -kT_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \iff k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \end{aligned}$$

Als Fazit halten wir fest, dass die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}}u(t), \quad t > t_0, \quad (1.8a)$$

$$u(t_0) = u_0 > 0, \quad (1.8b)$$

den radioaktiven Zerfall modelliert und die eindeutige Lösung

$$u(t) = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}(t-t_0)}u_0 = 2^{-\frac{(t-t_0)}{T_{1/2}}}u_0, \quad t \geq t_0 \quad (1.9)$$

besitzt, die in Abbildung 1.1 skizziert ist. Hierbei ist zu beobachten, dass $u(t)$, also die Anzahl der nicht zerfallenden Atomkerne, für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt.

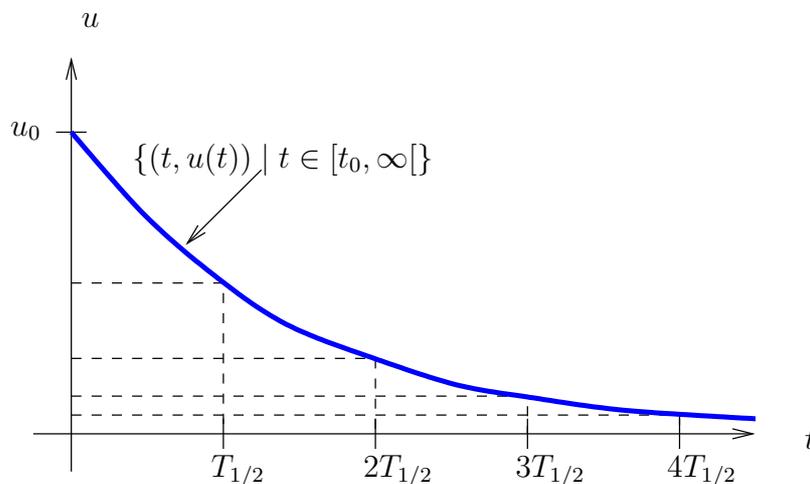


Abbildung 1.1: Radioaktiver Zerfall

1.2 Richtungsfeld und Phasenbild

Das im Folgenden definierte Richtungsfeld einer (expliziten) n -dimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung ist eine graphische Veranschaulichung der zugehörigen Lösungen. Ein wesentlicher Vorteil des Richtungsfeldes besteht darin, dass es sich zeichnen lässt, ohne die Differentialgleichung (1.2) analytisch zu lösen. Darüber hinaus kann das Richtungsfeld einerseits dazu verwendet werden, qualitative Aussagen über das Lösungsverhalten zu machen, und andererseits dazu, die Lösungen der Differentialgleichung numerisch zu approximieren.

Definition 1.2 (Richtungsfeld, Niveaulinie). a) Die Abbildung

$$R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t, v) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, v) \end{pmatrix}$$

heißt **Richtungsfeld** der Differentialgleichung (1.2). Für $(t, v) \in \Omega$ bezeichnen wir das Tripel $(t, v, f(t, v)) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ als **Linielement** der Differentialgleichung (1.2). b) Weiter bezeichnen wir die Menge

$$N_j(f, c) = \{(t, v) \in \Omega \mid f_j(t, v) = c\}, \quad j = 1, \dots, n$$

als **j -te Niveaulinie** (oder: **Isokline**) von f zum Niveau (oder: Level) $c \in \mathbb{R}$ und $N_j(f, 0)$ als **j -te Nullkline** von f .

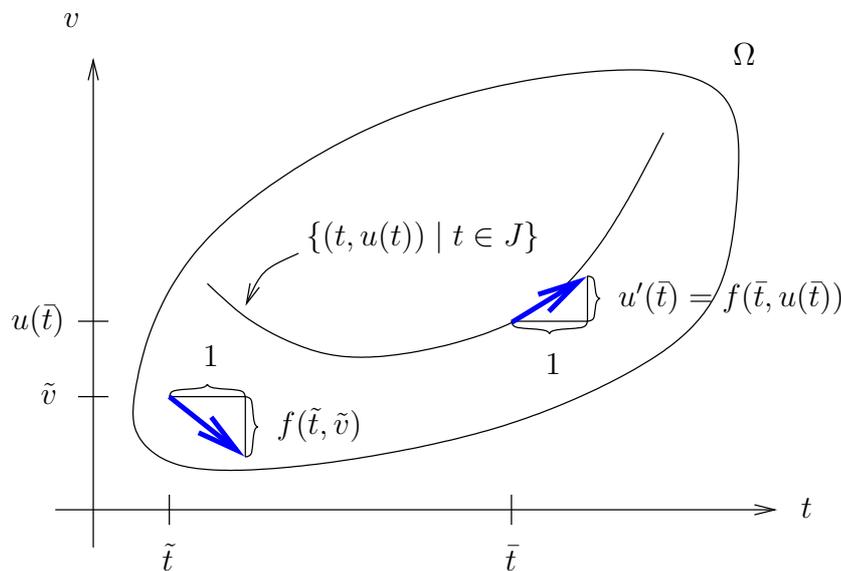


Abbildung 1.2: Lösung mit zwei Tangentialvektoren

Eine wichtige Erkenntnis ist, dass der Vektor

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, u(t)) \end{pmatrix}$$

ein Tangentialvektor an den Graphen $\{(t, u(t)) \mid t \in J\}$ der Lösung u ist, vgl. Abbildung 1.2. Etwas vereinfacht ausgedrückt, geben uns die Pfeile des Richtungsfeldes den Verlauf der Lösung u in Abhängigkeit von t an.

Um mit den Begrifflichkeiten aus Definition 1.2 etwas vertrauter zu werden, wollen wir das Richtungsfeld nun anhand eines mathematischen Beispiels illustrieren und knüpfen dazu an das Beispiel 1.1 an.

Beispiel 1.3 (Radioaktiver Zerfall). Betrachte die Differentialgleichung (1.4) für die Zerfallsrate $k = \frac{1}{2}$, also

$$u'(t) = -\frac{1}{2}u(t) \quad \text{mit} \quad f(t, v) := -\frac{1}{2}v. \quad (1.10)$$

Abbildung 1.3 zeigt das zu der Differentialgleichung (1.10) gehörende Richtungsfeld. Man beachte hierbei, dass die Lösungen der Differentialgleichung (1.10) tangential zum Richtungsfeld verlaufen.

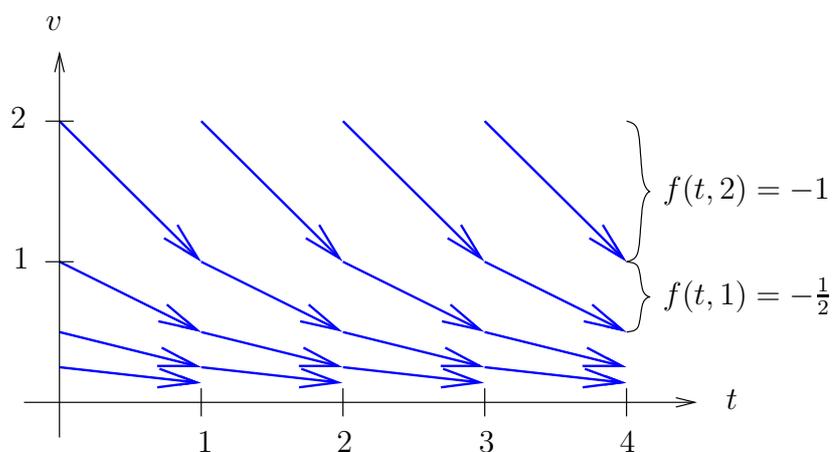


Abbildung 1.3: Richtungsfeld der Differentialgleichung (1.10)

Richtungsfelder können z. B. auch mit Maple erzeugt werden

```
with(plots):
fieldplot([1, -0.5*v], t = -1..5, v = -1..5);
```

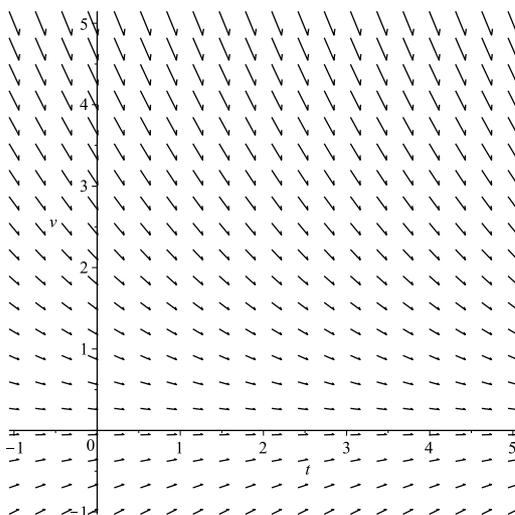


Abbildung 1.4: Richtungsfeld der Differentialgleichung (1.10) mit Maple

Das aus der Maple-Eingabe resultierende Richtungsfeld der Differentialgleichung (1.10) ist in Abbildung 1.4 dargestellt. Man beachte hierbei jedoch, dass Maple die Länge aller Pfeile mit gleichem Faktor skaliert hat!

In Raumdimensionen $n \geq 2$ erweist sich die graphische Veranschaulichung des Richtungsfeldes schwieriger. In diesem Fall projiziert man häufig das Richtungsfeld, um das Lösungsverhalten zu veranschaulichen.

Definition 1.4 (Projiziertes Richtungsbild, Phasenbild). Die Abbildung

$$P_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto f(t, v)$$

heißt **projiziertes Richtungsfeld** der Differentialgleichung (1.2) zum Zeitpunkt $t \in J$. Tragen wir in das Diagramm einige charakteristische Lösungen von (1.2) ein, so bezeichnen wir das Diagramm als **Phasenbild**.

Hierbei ist zu betonen, dass für autonome (zeitunabhängige) Differentialgleichungen, d. h. f hängt nicht explizit von t ab

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t \in J,$$

die Abbildungen P_t für alle Zeiten t übereinstimmen. In diesem Fall bezeichnen wir die Projektionsabbildung P_t abkürzend mit P .

In der Tat treten Richtungsfelder und ihre Projektionen in einer Vielzahl von Anwendungen auf. Beispielsweise lassen sich in der Meteorologie mit Richtungsfeldern Strömungsfelder des Windes und der Temperatur (siehe Abbildung 1.5) aber auch Windrichtungen (siehe Abbildung 1.6) veranschaulichen. Damit wir hierbei jedoch den Überblick nicht verlieren, wurde in Abbildung 1.5 und 1.6 jeweils das projizierte Richtungsfeld P_t zu einem festen Zeitpunkt t dargestellt, wobei der Fall $n = 2$ vorliegt. Der zeitliche Verlauf der Stömungen und Windrichtungen ließe sich jetzt zum Beispiel mit einer Bildsequenz veranschaulichen.

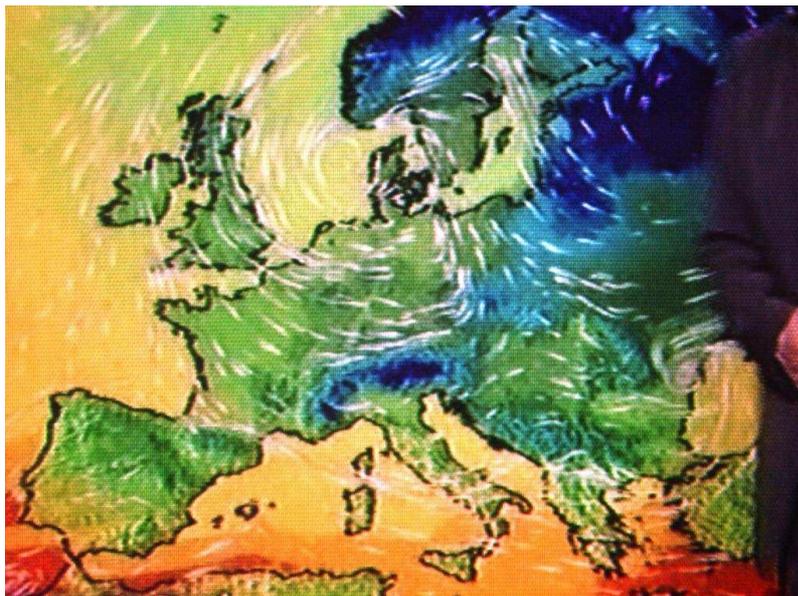


Abbildung 1.5: Strömungsfeld des Windes und der Temperatur als projiziertes Richtungsfeld



Abbildung 1.6: Windrichtungen als projiziertes Richtungsfeld

Wir werden das projizierte Richtungsfeld anhand eines Beispiels aus der theoretischen Biologie diskutieren.

Beispiel 1.5 (Populationsdynamik). Betrachte die **Lotka-Volterra-Gleichungen** (oder: **Räuber-Beute-Gleichungen**)

$$u_1'(t) = u_1(t) \cdot (k_1 - r_1 u_2(t)), \quad (1.11a)$$

$$u_2'(t) = u_2(t) \cdot (r_2 u_1(t) - k_2), \quad (1.11b)$$

für $t \in J$. Hierbei bezeichnen

$u_1(t)$: die Anzahl der Beutetiere zur Zeit t ,

$u_2(t)$: die Anzahl der Räuber zur Zeit t ,

k_1 : die Reproduktionsrate der Beute,

k_2 : die Sterberate der Räuber,

r_1 : die Fressrate der Räuber,

r_2 : die Reproduktionsrate der Räuber.

wobei $k_1, k_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $k_1, k_2, r_1, r_2 > 0$. Dieses mathematische Modell stammt ursprünglich aus der theoretischen Biologie und wurde von Alfred. J. Lotka und Vito Volterra aufgestellt. Dieses Modell beschreibt die Wechselwirkung zweier Populationen (Räuber und Beute), bei denen sich die Räuber von der Beute ernähren.

a) Zusammenhang zu (1.2): (1.11) lässt sich in der Form (1.2) schreiben mit

$$f(t, v) := \begin{pmatrix} f_1(t, v) \\ f_2(t, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(k_1 - r_1 v_2) \\ v_2(r_2 v_1 - k_2) \end{pmatrix}, \quad t \in J, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (1.12)$$

und

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

- b) Richtungsfeld: Das Richtungsfeld von (1.11) ist dreidimensional. Abbildung 1.7 veranschaulicht das Richtungsfeld von (1.11) für die Parameter $k_1 = k_2 = r_1 = r_2 = 1$.

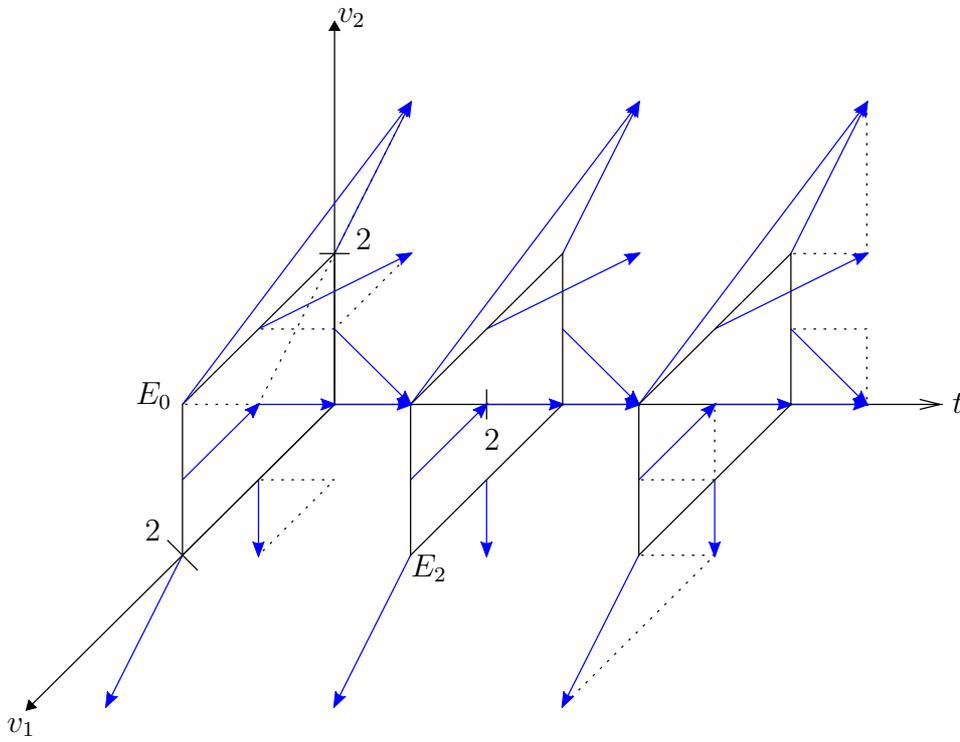


Abbildung 1.7: Dreidimensionales Richtungsfeld von (1.11)

Da die Funktion f aus (1.12) nicht von t abhängt, ist die Differentialgleichung (1.11) autonom. Somit ist das Richtungsfeld in jeder Ebene $E_t := \{(t, v) \mid v \in \mathbb{R}^2\}$ gleich. Daher bietet es sich an, stattdessen das projizierte Richtungsfeld zu zeichnen.

- c) Projiziertes Richtungsfeld: Das projizierte Richtungsfeld von (1.11) ist für die Parameter $k_1 = k_2 = r_1 = r_2 = 1$ in Abbildung 1.8 dargestellt.

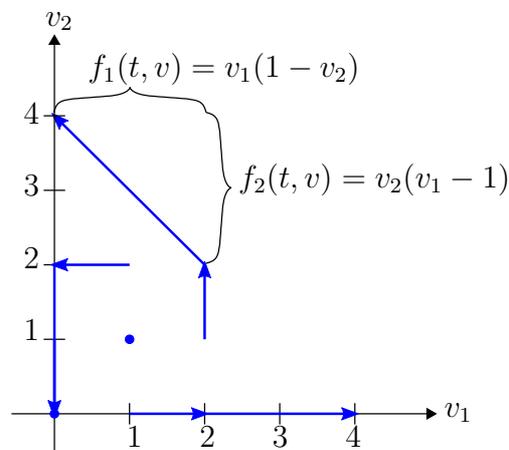


Abbildung 1.8: Projiziertes Richtungsfeld von (1.11)

Mit Maple lassen sich auch problemlos projizierte Richtungsfelder erzeugen, so erhalten wir beispielsweise durch die Maple-Eingabe

```
with(plots):
fieldplot([v1*(1-v2), v2*(v1-1)], v1 = 0..2, v2 = 0..2);
```

das projizierte Richtungsfeld von (1.11) für die Parameter $k_1 = k_2 = r_1 = r_2 = 1$, vgl. Abbildung 1.9.

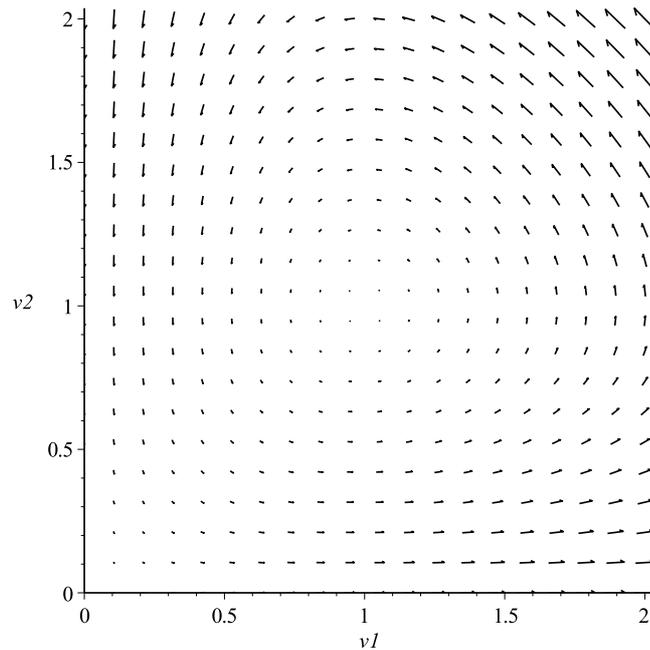


Abbildung 1.9: Projiziertes Richtungsfeld von (1.11) mit Maple

- d) Interpretation der Ergebnisse: Wenn die Räuber ausgestorben sind ($v_2 = 0$), dann vermehrt sich die Beute ungebremst. Sind umgekehrt jedoch alle Beutetiere ausgestorben ($v_1 = 0$), dann sterben die Räuber aus. Sind Beute und Räuber vorhanden, so oszillieren die Lösungen von (1.11) um das Gleichgewicht $(v_1, v_2) = (1, 1)$.

Auf den zwei Geraden $v_1 = 0$ und $v_2 = 1$ verläuft das Richtungsfeld senkrecht, d. h. es gilt $f_1(t, v) = 0$ und somit

$$N_1(f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(t, v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 0 \text{ oder } v_2 = 1\}.$$

Auf den zwei Geraden $v_1 = 1$ und $v_2 = 0$ verläuft das Richtungsfeld hingegen waagrecht, d.h. es gilt $f_2(t, v) = 0$ also

$$N_2(f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(t, v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 1 \text{ oder } v_2 = 0\}.$$

Die Menge $N_j(f)$ bezeichnet die j -te Nullkline der Differentialgleichung (1.11), $j = 1, 2$. Die Schnittpunkte dieser Nullklinen liefern die Gleichgewichte von (1.11). Ein **Gleichgewicht** der autonomen Differentialgleichung (1.11) ist ein Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = 0$. Im vorliegenden Fall sind dies die beiden Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

1.3 Eine einfache Differentialgleichung

Wir betrachten wieder die Differentialgleichung $u'(t) = f(t, u(t))$ aus (1.2). Der einfachste Fall dieser Differentialgleichung liegt vor, wenn f nicht von v abhängt. In diesem Fall geht (1.2) über in

$$u'(t) = f(t), t \in J. \quad (1.13)$$

Die Lösungen von (1.13) erhalten wir direkt durch Integration beider Seiten. Wir benötigen daher lediglich eine Stammfunktion F von f . Falls eine Stammfunktion F existiert (z. B., wenn f in einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ stetig ist), so ist $u = F$ eine Lösung von (1.13). Da Stammfunktionen aber nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind, ist die Funktion

$$u(t) = F(t) + c \quad (1.14)$$

für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Lösung von (1.13). Damit ist (1.13) offensichtlich nicht eindeutig lösbar. Die Eindeutigkeit der Lösung erhalten wir durch die zusätzliche Forderung einer Anfangsbedingung. Fordern wir die Anfangsbedingung

$$u(t_0) = u_0, t_0 \in J, u_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

so erhalten wir die Konstante $c \in \mathbb{R}^n$ aus (1.14) für $t = t_0$ und (1.15):

$$u_0 = u(t_0) = F(t_0) + c \iff c = u_0 - F(t_0).$$

Also besitzt die Anfangswertaufgabe (1.13), (1.15) die (eindeutige) Lösung

$$u(t) = F(t) - F(t_0) + u_0, \quad (1.16)$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Beispiel 1.6 (Bremsvorgang eines Autos). In diesem Beispiel untersuchen wir den Bremsvorgang eines Autos. Dabei interessieren wir uns speziell für die Geschwindigkeit (und die Bremszeit) sowie für den Bremsweg (und den Anhaltepunkt) des Fahrzeugs. Der Bremsweg entspricht der Strecke, die ein Fahrzeug vom Beginn der Bremsung bis zum Ende der Bremsung zurücklegt und berücksichtigt kein Reaktionsverhalten des Fahrers. Wir verwenden die aus der Physik geläufigen Bezeichnungen:

- $r(t)$: Position (Ort) zur Zeit t (in m),
- $v(t)$: Geschwindigkeit zur Zeit t (in m/s),
- $a(t)$: Beschleunigung (Geschwindigkeitsänderung) zur Zeit t (in m/s^2),
- r_0 : Ort zum Anfangszeitpunkt t_0 (in m),
- v_0 : Geschwindigkeit zum Anfangszeitpunkt t_0 (in m/s),
- K : konstante Bremskraft (in $N = kg \cdot m/s^2$),
- m : Masse des Autos (in kg).

Die mathematische Modellierung liefert zwei gekoppelte Differentialgleichungen:

$$r'(t) = v(t), \quad (1.17)$$

$$v'(t) = a(t). \quad (1.18)$$

Hierbei gilt nach dem zweiten Newtonschen Gesetz (Bewegungsgesetz, Kraft = Masse · Beschleunigung) die Beziehung $a(t) = -\frac{K}{m}$. Wir werden nun zunächst (1.18) lösen, die Lösung v dann in (1.17) einsetzen und anschließend (1.17) lösen.

a) Geschwindigkeit (und Bremszeit): Betrachte das Anfangswertproblem

$$v'(t) = a(t) := -\frac{K}{m}, t \in \mathbb{R}, \quad (1.19a)$$

$$v(t_0) = v_0, \quad (1.19b)$$

wobei die Geschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}$ zu Beginn der Bremsung positiv ist, d. h. $v_0 > 0$. Eine Stammfunktion von a ist

$$A(t) = -\frac{K}{m}t, t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung von (1.19), also die **Geschwindigkeit** v , die wir aus der Formel (1.16) erhalten, lautet

$$v(t) = A(t) - A(t_0) + v_0 = -\frac{K}{m}t + \frac{K}{m}t_0 + v_0 = -\frac{K}{m}(t - t_0) + v_0, t \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Das Auto stoppt, sobald $v(t) = 0$ gilt. Damit ergibt sich **Stoppzeit** (oder **Bremszeit**) t_{stop} (in s) durch

$$0 = v(t_{\text{stop}}) = -\frac{K}{m}(t_{\text{stop}} - t_0) + v_0 \iff t_{\text{stop}} = \frac{mv_0}{K} + t_0. \quad (1.21)$$

Ein Auto mit einem Gesamtgewicht von 1000kg und einer (konstanten) Bremskraft von 6500N benötigt bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zur Zeit $t_0 = 0\text{s}$ bei einer Vollbremsung demnach

$$t_{\text{stop}} = \frac{1000\text{kg} \cdot \frac{50}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6500\text{N}} \approx 2,14\text{s (Sekunden)}$$

bis zum Stillstand, vgl. Abbildung 1.10.

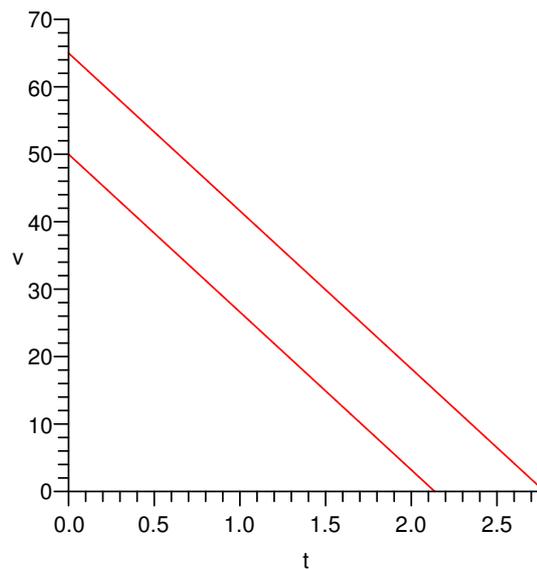


Abbildung 1.10: Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für (1.19)

Das in Abbildung 1.10 angegebene Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm wurde mit den Maple-Befehlen

```
with(plots):
K := 6500:
m := 1000:
th := v0 -> ((v0/3.6)*m)/K;
v := (t, v0) -> (v0/3.6 - (K*t)/m)*3.6;
P1 := plot(v(t, 50), t = 0..th(50), v = 0..70):
P2 := plot(v(t, 65), t = 0..th(65), v = 0..70):
display(P1, P2);
```

erzeugt.

b) Bremsweg (und Anhaltepunkt): Betrachte nun das Anfangswertproblem

$$r'(t) = v(t) = -\frac{K}{m}(t - t_0) + v_0, t \in \mathbb{R}, \quad (1.22a)$$

$$r(t_0) = r_0, \quad (1.22b)$$

wobei die Position des Fahrzeugs zu Beginn der Bremsung bei $r_0 \in \mathbb{R}$ liegt. Hierbei haben wir die Lösung v aus (1.20) bereits in (1.22a) einfließen lassen. Eine Stammfunktion von v ist

$$V(t) = -\frac{K}{m} \left(\frac{1}{2}t^2 - t_0t \right) + v_0t, t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung von (1.22), also die **Position** r des Fahrzeugs, die wir erneut aus der Formel (1.16) erhalten, lautet

$$\begin{aligned} r(t) &= V(t) - V(t_0) + r_0 \\ &= -\frac{K}{m} \left(\frac{1}{2} t^2 - t_0 t \right) + v_0 t + \frac{K}{m} \left(\frac{1}{2} t_0^2 - t_0^2 \right) - v_0 t_0 + r_0 \\ &= -\frac{K}{m} \frac{1}{2} (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + r_0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Daraus erhalten wir den **Anhaltepunkt** r_{stop} (in m)

$$\begin{aligned} r_{\text{stop}} := r(t_{\text{stop}}) &= -\frac{K}{m} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{mv_0}{K} + t_0 \right) - t_0 \right)^2 \\ &\quad + v_0 \left(\left(\frac{mv_0}{K} + t_0 \right) - t_0 \right) + r_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{K} v_0^2 + r_0, \end{aligned}$$

und den **Bremsweg** (in m), d. h. den während des Bremsvorgangs zurückgelegte Weg,

$$r_{\text{stop}} - r(t_0) = \frac{1}{2} \frac{m}{K} v_0^2 + r_0 - r_0 = \frac{1}{2} \frac{m}{K} v_0^2.$$

Beachte, dass die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sowohl im Anhaltepunkt r_{stop} als auch im Bremsweg quadratisch eingeht. Wir betrachten erneut unser obiges Auto mit der Anfangsgeschwindigkeit $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ im Ort $r_0 = 0\text{m}$, so ergibt sich ein Anhaltepunkt und zugleich der Bremsweg von

$$r_{\text{stop}} = r_{\text{stop}} - r(t_0) = \frac{1}{2} \frac{m}{K} v_0^2 \approx 14,8\text{m (Meter)},$$

vgl. Abbildung 1.11.

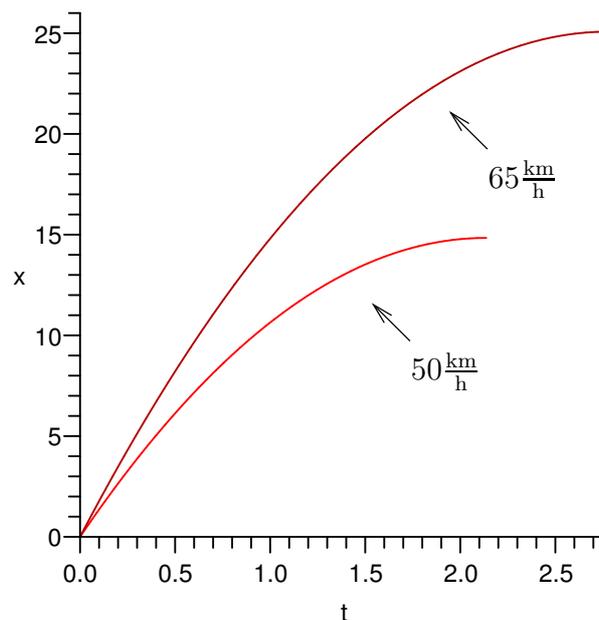


Abbildung 1.11: Zeit-Bremsweg-Diagramm für (1.22)

Das in Abbildung 1.11 erzeugte Zeit-Bremsweg-Diagramm wurde mit den folgenden Maple-Befehlen erzeugt:

```
with(plots):
K := 6500:
m := 1000:
th := v0 -> ((v0/3.6)*m)/K;
x := (x, v0) -> v0/3.6 * t - K*t^2 / (2*m);
P1 := plot(x(t, 50), t = 0..th(50), x = 0..26):
P2 := plot(x(t, 65), t = 0..th(65), x = 0..26):
display(P1, P2);
```

At 5mph over the 30mph limit,
how much further does it take to stop?



Twenty one feet, that's over six metres.

At 30mph, you would have stopped in front of the first child.

At 35mph, you would not only hit the first child, but you would still be doing 17mph when you hit the second child.

It doesn't matter how good a driver you are. The faster you go, the longer it takes to stop. In this case the extra 5mph means the total stopping distance of an average saloon with ABS is an agonising ninety six feet, or twenty nine metres. Which brings you to the feet of the third child.

30mph might feel slow, but only until someone steps out in front of you.

THINK
Slow down.

Abbildung 1.12: Verkehrssicherheit

Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u'(t) &= f(t), \\ u(t_0) &= u_0,\end{aligned}$$

mit der in (1.16) bestimmten Lösung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds.$$

Beachte hierbei, dass die Lösung u im Allgemeinen nicht durch eine explizite Formel aufgelöst werden kann.

Beispiel 1.7. Die Funktion

$$f(t) = e^{-t^2}$$

besitzt keine Stammfunktion, die explizit angegeben werden kann. In einem solchen Fall hilft nur eine numerische Approximation.

1.4 Anfangswertaufgaben und Lösungsbegriff

Anfangswertaufgabe: Seien $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $(t_0, u_0) \in \Omega$ gegeben, dann lautet die **Anfangswertaufgabe** (oder: das **Anfangswertproblem**)

$$u'(t) = f(t, u(t)), \tag{1.24a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{1.24b}$$

Definition 1.8 (Lösung einer Anfangswertaufgabe). Eine Funktion $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ offen, abgeschlossen oder halboffenes Intervall, heißt **Lösung der Anfangswertaufgabe** (1.24), falls die folgenden Eigenschaften gelten

- (1) J ist ein echtes Intervall (d. h. $\overset{\circ}{J} \neq \emptyset$)
- (2) $\text{graph}(u) := \{(t, u(t)) \in \Omega \mid t \in J\} \subseteq \Omega$
- (3) $u'(t) = f(t, u(t)) \forall t \in J$,
- (4) $u(t_0) = u_0$ und $t_0 \in J$.

Falls nur (1)-(3) gelten, so heißt u **Lösung der Differentialgleichung** (1.24a).

Da die Differentierbarkeit einer Funktion einen offenen Definitionsbereich voraussetzt und $J \subseteq \mathbb{R}$ aber ein beliebiges offenes, abgeschlossenes oder halboffenes Intervall sein darf, ist $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ in Definition 1.8 wie folgt zu verstehen:

$$u \in C^1(J, \mathbb{R}^n) \iff u \in C(J, \mathbb{R}^n), u \in C^1(\overset{\circ}{J}, \mathbb{R}^n) \text{ und } u' \in C(J, \mathbb{R}^n). \tag{1.25}$$

Die Menge $\text{graph}(u)$ heißt **Graph von u** . Der Graph von u sowie der Lösungsbegriff aus Definition 1.8 sind in Abbildung 1.13 veranschaulicht.

Bemerkung 1.9. Ist $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$, so ist die Funktion $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Ist $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, so ist die Funktion $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und sowohl u als auch u' sind stetig.

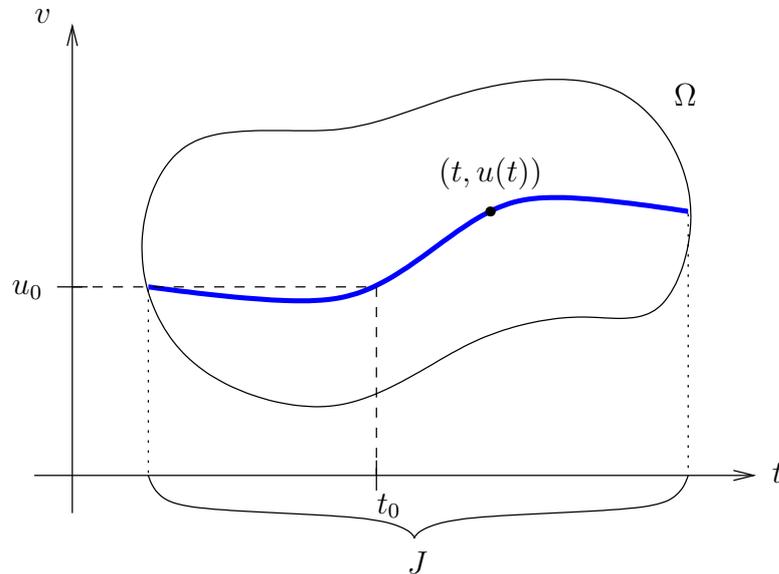


Abbildung 1.13: Lösung einer Anfangswertaufgabe

Beispiel 1.10 (Radioaktiver Zerfall). Wir betrachten erneut die Anfangswertaufgabe (1.8) zur Beschreibung des radioaktiven Zerfalls aus den Beispielen 1.1 und 1.3. Die Lösung (1.9) von (1.8) erfüllt offensichtlich die Bedingungen aus Definition 1.8 für $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vergleiche Abbildung 1.14. Dabei ist jedoch zu beachten, dass eine negative Anzahl an Atomkernen zum Anfangszeitpunkt t_0 physikalisch keinen Sinn macht. Daher müssen wir Ω eigentlich auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ einschränken.

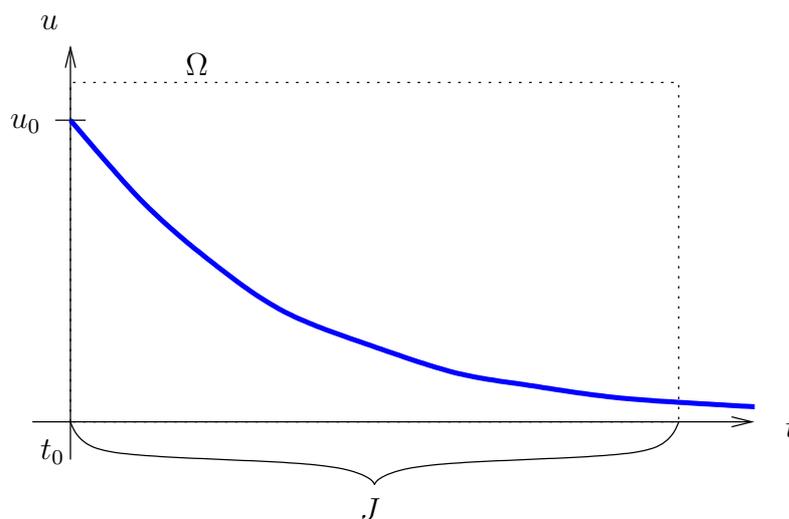


Abbildung 1.14: Lösung des radioaktiven Zerfalls

2 Lösungstheorie

2.1 Differential- versus Integralgleichung

Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), t \in J, \quad (2.1a)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (2.1b)$$

mit $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. (2.1) kann (zunächst formal) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in die **Integralgleichung**

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, t \geq t_0, t \in J \quad (2.2)$$

umgeschrieben werden. Hierbei ist zu beachten, dass für vektorwertige Funktionen $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ die Integration in (2.2) komponentenweise definiert ist, d. h.

$$\int_{t_0}^t g(s) ds := \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t g_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t g_n(s) ds \end{pmatrix}, \text{ wobei } g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Der Zusammenhang zwischen der Anfangswertaufgabe (2.1) und der Integralgleichung (2.2) beschreibt das folgende Lemma.

Lemma 2.1 (Differential- versus Integralgleichung). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Ist $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2.1), so löst u auch (2.2).
- (2) Ist $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2.2), dann ist $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ und löst (2.1).

Beweis. (1) Sei $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2.1). Integrieren wir beide Seiten in (2.1a) bzgl. t von t_0 bis t , so erhalten wir aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und (2.1b)

$$u(t) - u_0 = u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, t > t_0, t \in J.$$

Die Addition beider Seiten mit u_0 liefert uns (2.2).

- (2) Sei $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2.2). Aus

$$u_i(t) = (u_0)_i + \underbrace{\int_{t_0}^t \underbrace{f_i(s, u(s))}_{\text{stetig}} ds}_{\text{differentierbar}}, i = 1, \dots, n$$

folgt

$$u_i \in C^1(J, \mathbb{R}) \text{ und } u'_i(t) = f_i(t, u(t)), t \in J \text{ sowie } u_i(t_0) = (u_0)_i$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Folglich gilt $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ und u löst (2.1). □

Beispiel 2.2 (Radioaktiver Zerfall). Betrachte die Anfangswertaufgabe (1.5) aus Beispiel 1.1

$$\begin{aligned} u'(t) &= -ku(t), t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0 > 0, \end{aligned}$$

mit $f(t, v) := -kv$ und $n = 1$. Die zu (1.5) äquivalente Integralgleichung lautet

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t -ku(s)ds.$$

Die aus (1.6) bekannte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(t) = e^{-k(t-t_0)}u_0, t \geq t_0$$

löst auch die Integralgleichung, denn aus der Integration durch Substitution folgt

$$\begin{aligned} u_0 + \int_{t_0}^t -ku(s)ds &= u_0 + \int_{t_0}^t -ke^{-k(s-t_0)}u_0ds = u_0 + \int_0^{t-t_0} -ke^{-kr}u_0dr \\ &= u_0 + [e^{-kr}u_0]_{r=0}^{t-t_0} = u_0 + e^{-k(t-t_0)}u_0 - e^0u_0 = e^{-k(t-t_0)}u_0 = u(t). \end{aligned}$$

2.2 Der Existenzsatz von Peano

Bevor wir Lösungsverfahren kennenlernen, wollen wir untersuchen, ob Differentialgleichungen überhaupt Lösungen besitzen, bzw. ob diese eindeutig sind. Dies ist nur unter zusätzlichen Voraussetzungen der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.3. Die Anfangswertaufgabe

$$(u(t))^2 + t^2u'(t) = 0, t > 0, \tag{2.3a}$$

$$u(0) = 1, \tag{2.3b}$$

besitzt keine Lösung. Beweis: Angenommen u ist eine Lösung von (2.3), so folgt aus (2.3a) bei $t = 0$ und (2.3b)

$$0 = (u(0))^2 + 0^2u'(0) = (u(0))^2 = 1.$$

also $u \notin C^1(J, \mathbb{R})$, vgl. (1.25). Schreiben wir (2.3a) in der Form

$$u'(t) = f(t, u(t)), t > 0,$$

so ist $f(t, v) = -\frac{v^2}{t^2}$. Also hat $f(\cdot, v)$ für $v = u(0) \neq 0$ eine Polstelle bei $t = 0$ und ist insbesondere nicht stetig, siehe Abbildung 2.1.

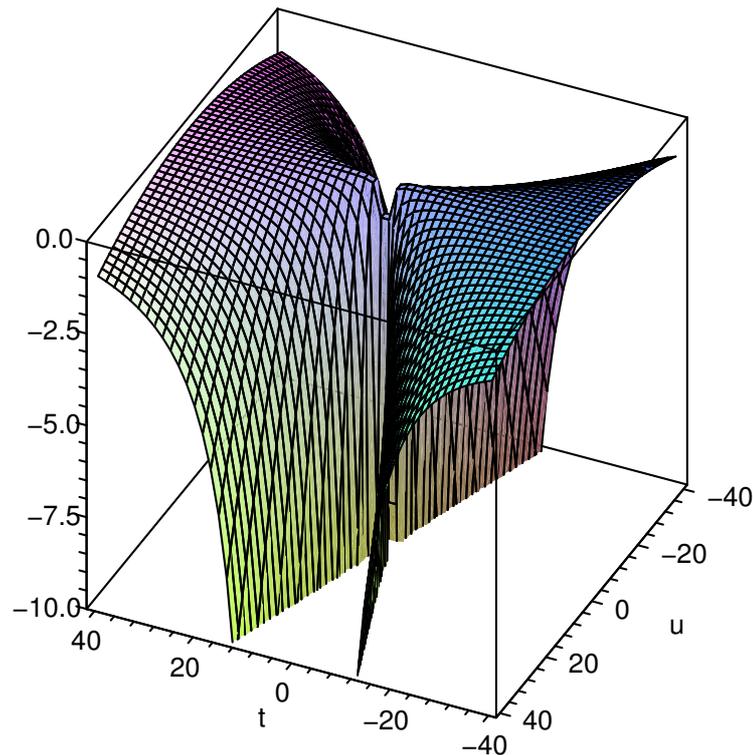


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung von $f(t, v) = -\frac{v^2}{t^2}$

Die Abbildung 2.1 wurde erneut mit Maple erzeugt:

```
with(plots):
f := (t,v) -> - v^2/t^2;
plot3d(f(t, v), t = -40 .. 40, v = -40 .. 40,
      grid = [50, 50], orientation = [115, 55],
      axes = boxed, view = -10 .. 0);
```

Der folgende Satz zeigt, dass für die Existenz von Lösungen alleine schon die Stetigkeit der Funktion f ausreicht. Der Beweis wird hier nicht vorgeführt und wir verweisen stattdessen auf [1, Satz 2.2.2].

Satz 2.4 (Existenzsatz von Peano). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, u_0) \in \Omega$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (2.4a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (2.4b)$$

mindestens eine **lokale** Lösung, d. h. es gibt ein $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$ derart, dass die Anfangswertaufgabe (2.4) auf dem Intervall $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mindestens eine Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ besitzt.

2.3 Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Es bleibt die Frage, ob die Existenz einer Lösung die Eindeutigkeit impliziert. Dies ist ebenfalls nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.5. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad (2.5a)$$

$$u(0) = 0. \quad (2.5b)$$

Mit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(t, v) = \sqrt{|v|}$ gilt $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und daher liefert Satz 2.4 mit $(t_0, u_0) = (0, 0) \in \Omega$ die Existenz mindestens einer Lösung u von (2.5). Offensichtlich löst die **triviale Lösung** (oder: **Nulllösung**) $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, die Anfangswertaufgabe (2.5). Darüber hinaus ist auch die Funktion

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq c \\ \frac{(t-c)^2}{4} & , t > c \end{cases}$$

für jedes $c \geq 0$ eine Lösung von (2.5). Beweis (durch Probe): Wegen $c \geq 0$ erfüllt u_c die Anfangsbedingung $u_c(0) = 0$, vgl. (2.5b). Für $t \leq c$ löst $u_c(t) = 0$ offensichtlich die Differentialgleichung (2.5a). Dies gilt auch für $t > c$, denn aus der Kettenregel erhalten wir

$$u'_c(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{(t-c)^2}{4} \right] = \frac{2(t-c)}{4} = \frac{t-c}{2} = \sqrt{\left| \frac{(t-c)^2}{4} \right|} = \sqrt{|u_c(t)|}.$$

Somit besitzt (2.5) unendlich viele verschiedene Lösungen, die nicht einmal lokal eindeutig sind, d. h. es existiert keine Nullumgebung (Umgebung um $t_0 = 0$), in der die Lösung von (2.5) eindeutig ist, vgl. Abbildung 2.2.

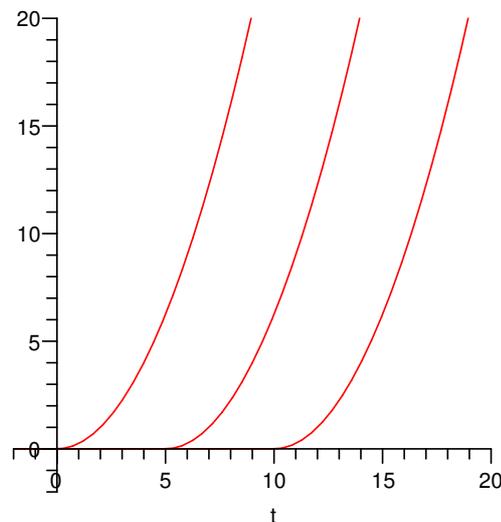


Abbildung 2.2: Lösung u_c von (2.5) für $c = 0, 5$ und 10

Das Hauptproblem, das in diesem Beispiel die Eindeutigkeit verhindert, besteht darin, dass die Steigung der Funktion

$$f(v) = \sqrt{|v|}$$

in keiner Nullumgebung beschränkt ist, vgl. Abbildung 2.3.

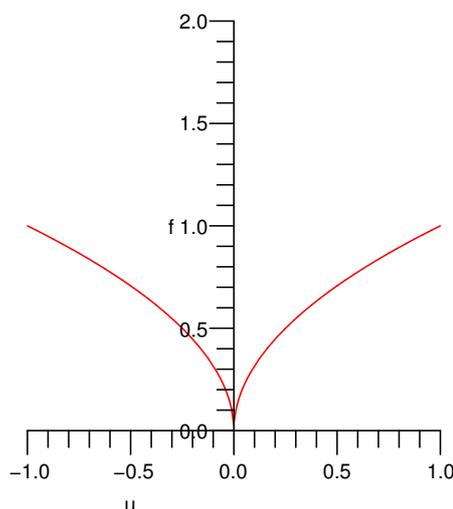


Abbildung 2.3: $f(t, u) = \sqrt{|u|}$

Beispiel 2.5 zeigt, dass die Stetigkeit von f im Allgemeinen nicht ausreicht, um (zusätzlich zu der Existenz) die Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe (2.4) zu garantieren. Es liegt daher nahe, weitere Bedingungen an f zu stellen.

Definition 2.6 (Lipschitz-beschränkt). Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, v) \mapsto f(t, v)$$

heißt **Lipschitz-beschränkt** in Ω (bezüglich der 2. Variablen), falls

$$\exists L \geq 0 : \|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L \|v - w\| \quad \forall (t, v), (t, w) \in \Omega. \quad (2.6)$$

Hierbei nennen wir (2.6) die **Lipschitz-Bedingung** und L die **Lipschitz-Konstante** von f in Ω .

In Anwendungen ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ häufig ein Quader der Form $\Omega = J \times Q$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Dies verdeutlichen die folgenden Beispiele.

Beispiel 2.7.

(1) Seien $f(t, v) = cv$ mit $c \in \mathbb{R}$, $J = [a, b]$ beliebig und $Q = \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|f(t, v) - f(t, w)| = |c(v - w)| = \underbrace{|c|}_{=:L} |v - w| \quad \forall t \in J \forall v, w \in \mathbb{R}.$$

(2) Sei $f(t, v) = -2tv$ mit $J = [a, b]$ beliebig und $Q = \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(t, v) - f(t, w)| &= |2t(v - w)| = 2|t||v - w| \\ &\leq 2 \underbrace{\max\{|a|, |b|\}}_{=:L} |v - w| \quad \forall t \in J \forall v, w \in Q. \end{aligned}$$

(3) Sei $f(t, v) = Av$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ beliebig und $Q = \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| = \|A(v - w)\| \leq \underbrace{\|A\|}_{=:L} \|v - w\| \quad \forall t \in J \forall v, w \in Q,$$

wobei

$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$$

die von der Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte **Matrixnorm** bezeichnet. Zum Beispiel erhalten wir für die **Maximumsnorm**

$$\|v\|_\infty := \max_{j=1, \dots, n} |v_j|$$

die **Zeilensummennorm**

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

als zugehörige Matrixnorm.

(4) Sei $f(t, v) = f\left(t, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$ mit $J \subseteq \mathbb{R}$ beliebig, $Q = [-2, 2] \times [-2, 2]$ und \mathbb{R}^n versehen mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt für alle $t \in J$ und $v, w \in Q$ zunächst

$$\begin{aligned} \|f(t, v) - f(t, w)\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} v_1^2 - w_1^2 \\ v_1 + 2v_2 - w_1 - 2w_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max\{|v_1^2 - w_1^2|, |v_1 + 2v_2 - w_1 - 2w_2|\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} |v_1^2 - w_1^2| &= |(v_1 + w_1)(v_1 - w_1)| = |v_1 + w_1| |v_1 - w_1| \\ &\leq (|v_1| + |w_1|) |v_1 - w_1| \leq 4 \|v - w\|_\infty \end{aligned}$$

und

$$|v_1 + 2v_2 - w_1 - 2w_2| \leq |v_1 - w_1| + 2|v_2 - w_2| \leq 3 \|v - w\|_\infty$$

folgt

$$\|f(t, v) - f(t, w)\|_\infty \leq 4 \|v - w\|_\infty \quad \forall t \in J \forall v, w \in Q.$$

- (5) Sei $f(t, v) = \sqrt{|v|}$ mit $J = [a, b]$ beliebig und $Q = \mathbb{R}$. Die Funktion f ist nicht Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q$ bzgl. v . Beweis: Angenommen es gibt ein $L \geq 0$ mit

$$\left| \sqrt{|v|} - \sqrt{|w|} \right| = |f(t, v) - f(t, w)| \leq L |v - w| \quad \forall t \in J \forall v, w \in Q.$$

Für $w = 0$ erhalten wir $|v|^{\frac{1}{2}} \leq L|v|$ und somit $|v|^{-\frac{1}{2}} \leq L$ für $v \neq 0$. Da aber $|v|^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow 0$ gilt, finden wir ein $v \in \mathbb{R}$, so dass $|v|^{-\frac{1}{2}} \leq L$ nicht erfüllt ist. Damit erhalten wir einen Widerspruch zu unserer Annahme. Folglich ist f nicht Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q$ bzgl. v .

Betrachten wir $Q_\varepsilon = [\varepsilon, \infty)$ für $\varepsilon > 0$ (anstelle von $Q = \mathbb{R}$), so gilt

$$\left| |v|^{\frac{1}{2}} - |w|^{\frac{1}{2}} \right| = \left| v^{\frac{1}{2}} - w^{\frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{v - w}{v^{\frac{1}{2}} + w^{\frac{1}{2}}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}_{=L_\varepsilon} |v - w| \quad \forall v, w \in Q_\varepsilon$$

Beispiel 2.7(5) zeigt, dass die Lipschitz-Beschränktheit von f (bzgl. v) stark von dem gewählten Gebiet Q abhängt. Die Lipschitz-Bedingung (2.6) gilt in Anwendungen oftmals nicht für $Q = \mathbb{R}^n$, sondern nur in einem kompakten Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \forall i = 1, \dots, n\},$$

wobei wir wieder $a_i < b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ voraussetzen.

Satz 2.8 (Mittelwertsatz (Integralform)). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gelten für je zwei Punkte $v, w \in \Omega$ mit der Eigenschaft

$$S(v, w) := \{v + s(w - v) \mid s \in [0, 1]\} \subseteq \Omega$$

die Formel

$$f(v) - f(w) = \int_0^1 Df(v + s(w - v))(v - w) ds = \int_0^1 Df(v + s(w - v)) ds (v - w) \quad (2.7)$$

sowie die Abschätzung

$$\|f(v) - f(w)\| \leq \sup_{s \in [0, 1]} \|Df(v + s(w - v))\| \|v - w\|. \quad (2.8)$$

Beweis. Seien $v, w \in \Omega$ mit $S(v, w) \subseteq \Omega$. Für $g(s) := -f(v + s(w - v))$ mit $s \in [0, 1]$ gilt $g \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, da $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, und weiter folgt aus der Kettenregel

$$g'(s) = \frac{d}{ds} [-f(v + s(w - v))] = Df(v + s(w - v))(v - w).$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\int_0^1 Df(v + s(w - v))(v - w) ds = \int_0^1 g'(s) ds = g(1) - g(0) = f(v) - f(w).$$

Wenden wir nun die Norm auf beiden Seiten an, so erhalten wir durch Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\| &= \left\| \int_0^1 Df(v + s(w - v))(v - w) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(v + s(w - v))(v - w)\| ds \\ &\leq \int_0^1 \|Df(v + s(w - v))\| \|v - w\| ds \\ &\leq \sup_{s \in [0,1]} \|Df(v + s(w - v))\| \|v - w\|. \end{aligned}$$

□

Das folgenden Lemma zeigt, dass die Lipschitz-Bedingung (2.6) für stetig differenzierbare f äquivalent zur Beschränktheit der ersten Ableitung von f ist. Die Beschränktheit von $D_v f$ bietet somit eine Alternative zur Überprüfung der Lipschitz-Bedingung (2.6) und somit eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Lipschitz-Konstanten L . Können wir die Ableitung Df durch eine Konstante L beschränken, so ist diese Konstante auch eine Lipschitz-Konstante von f .

Lemma 2.9 (Charakterisierung der Lipschitz-Beschränktheit). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C(J \times \overline{U}, \mathbb{R}^n)$, $D_v f \in C(J \times U, \mathbb{R}^{n,n})$ und $L \geq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$(1) \|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L \|v - w\| \quad \forall t \in J \forall v, w \in \overline{U}, \quad (2.9)$$

$$(2) \|D_v f(t, v)\| \leq L \quad \forall t \in J \forall v \in U, \quad (2.10)$$

mit

$$D_v f(t, v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(t, v) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_n}(t, v) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_1}(t, v) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial v_n}(t, v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad (t, v) \in J \times U.$$

Beweis. (2.10) \implies (2.9): Aus (2.10), dem Mittelwertsatz 2.8 und der Konvexität von U folgt

$$\begin{aligned} \|f(t, v) - f(t, w)\| &= \left\| \int_0^1 D_v f(t, v + s(w - v)) ds (v - w) \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D_v f(t, v + s(w - v))\| ds \|v - w\| \leq L \|v - w\| \quad \forall t \in J \forall v, w \in U. \end{aligned}$$

(2.9) \implies (2.10): Sei umgekehrt (2.9) vorausgesetzt. Seien $v \in U$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert (wegen der Stetigkeit von $D_v f$ in v) ein $\delta > 0$, so dass für $h \in U$ mit $\|h\| \leq \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \|D_v f(t, v)h\| &\leq \|f(t, v + h) - f(t, v) - D_v f(t, v)h\| + \|f(t, v + h) - f(t, v)\| \\ &\leq \left\| \int_0^1 D_v f(t, v + sh) ds \cdot h - D_v f(t, v)h \right\| + L \|v + h - v\| \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \|D_v f(t, v + sh) - D_v f(t, v)\| ds \|h\| + L \|h\| \leq (L + \varepsilon) \|h\|,$$

wobei wir den Mittelwertsatz 2.8 und (2.9) angewendet haben. Diese Ungleichung gilt sogar für alle $h \in \mathbb{R}^n$, denn sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $h = r \cdot l$, $r \in \mathbb{R}$, $l \in U$ und $\|l\| \leq \delta$, dann gilt aufgrund der absoluten Homogenität der Norm $\|\cdot\|$

$$\begin{aligned} \|D_v f(t, v)h\| &= \|D_v f(t, v)rl\| = |r| \|D_v f(t, v)l\| \leq (L + \varepsilon)|r| \|l\| \\ &= (L + \varepsilon) \|rl\| = (L + \varepsilon) \|h\|. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Matrixnorm folgt nun

$$\|D_v f(t, v)\| := \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ h \neq 0}} \frac{\|D_v f(t, v)h\|}{\|h\|} \leq L + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkung 2.10. Seien die Voraussetzungen von Lemma 2.9 erfüllt, $J \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $K \subseteq U$ kompakt. Dann ist

$$\|D_v f\| : J \times K \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad (t, v) \mapsto \|D_v f(t, v)\|$$

eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $J \times K$ und nimmt dort ihr Maximum (und Minimum) an. In diesem Fall ist

$$L := \max_{(t,v) \in J \times K} \|D_v f(t, v)\|$$

die bestmögliche Lipschitz-Konstante.

Satz 2.11 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf, globale Version).

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ und sei $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}^n$ (bezüglich der 2. Variablen) mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2.4) genau eine **globale** Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ und für $v_0 \in C(J, \mathbb{R}^n)$ mit $v_0(t) := u_0$, $t \in J$, konvergiert die durch

$$v_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v_k(s)) ds, \quad t \in J, k \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2.11)$$

definierte Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ gegen u , d. h.

$$\|u - v_k\|_\infty := \sup_{t \in J} \|u(t) - v_k(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Bemerkung 2.12. Die Iterationsvorschrift in (2.11) heißt **Picard-Iteration**, die Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heißt **Picard-Folge** und die Folgenglieder v_k heißen **Picard-Iterierte**. Die Picard-Folge ist (im Prinzip) konstruktiv, d. h. man kann (in einfachen Fällen) die Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ tatsächlich berechnen. Beachte, dass (2.12) besagt, dass die Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig (für $t \in J$) gegen u konvergiert.

Beispiel 2.13 (Exponentialreihe). Wir betrachten die **Exponentialreihe**

$$e^z = \exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Funktion $u(t) = e^t$ löst die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.13a)$$

$$u(0) = 1, \quad (2.13b)$$

womit die Existenz einer Lösung von (2.13) sichergestellt ist. Alternativ können wir die Existenz auch aus Satz 2.4 schließen. Wir wollen die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung von (2.13) klären und dazu Satz 2.11 anwenden. Dazu wählen wir $J = [a, b]$ mit $(t_0, u_0) = (0, 1) \in J \times \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt für $f(t, v) := v$, dass $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ Lipschitz-beschränkt in $J \times \mathbb{R}$ (bezüglich der 2. Variablen) ist. Die Lipschitz-Konstante ist hierbei durch $L = 1$ gegeben. Nach Satz 2.11 besitzt (2.13) somit eine eindeutige Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R})$, die folglich durch $u(t) = e^t$ gegeben sein muss. Für die konstante Funktion $v_0(t) = u_0 = 1$ lauten die ersten Picard-Iterierten

$$v_0(t) = 1,$$

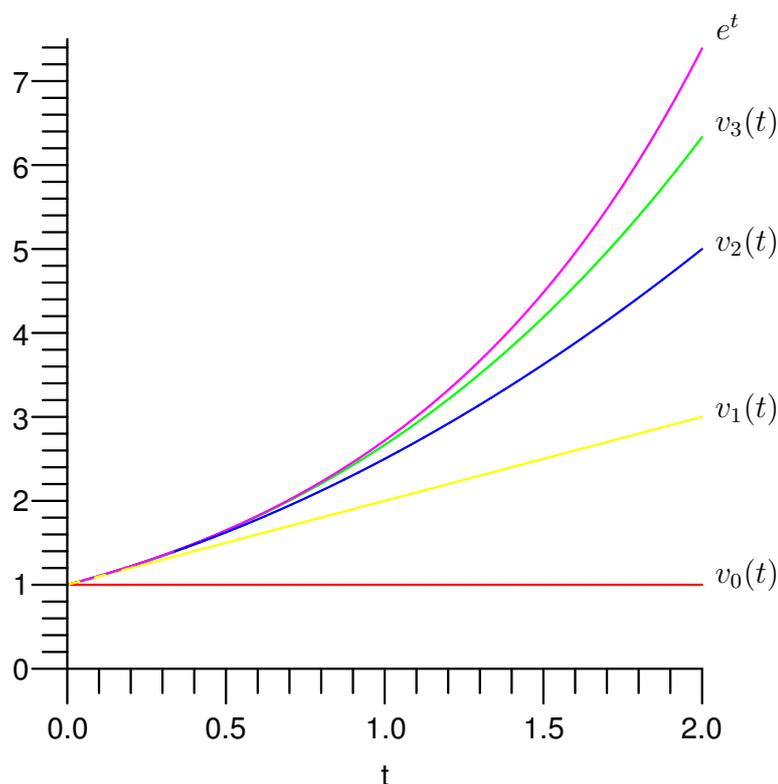
$$v_1(t) = u_0 + \int_0^t v_0(s) ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$v_2(t) = u_0 + \int_0^t v_1(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}.$$

Per Induktion beweist man leicht, dass

$$v_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Damit entspricht v_k der k -ten Partialsumme der Exponentialreihe und die Picard-Iteration liefert wie erwartet die Exponentialreihe als Lösung von (2.13). Satz 2.11 liefert insbesondere, dass $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (also die Funktionenfolge der Partialsummen der Exponentialreihe) auf jedem kompakten Intervall $J = [a, b]$ gleichmäßig gegen die Exponentialreihe $u(t) = e^t$ konvergiert.

Abbildung 2.4: Die ersten 4 Picard-Iterierten und e^t

Die ersten vier Picard-Iterierten sind in Abbildung 2.4 dargestellt und wurden mit den Maple-Befehlen

```
with(plots):
plot({1, 1+t, 1+t+(1/2)*t^2, 1+t+(1/2)*t^2+(1/6)*t^3,
      exp(t)}, t=0..2);
```

erstellt.

Beweis. (von Satz 2.11). Der Beweis ist in vier Schritte unterteilt.

Schritt 1. *Es gilt*

$$\|v_{k+1}(t) - v_k(t)\| \leq M_0 L^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in J \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.14)$$

wobei

$$M_0 := \max_{t \in J} \|f(t, u_0)\|.$$

Der Beweis von Schritt 1 erfolgt durch **vollständige Induktion** über $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang ($k = 0$): Nach (2.11) gilt

$$\|v_1(t) - v_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, v_0(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u_0)\| ds \right|$$

$$\leq M_0 \left| \int_{t_0}^t ds \right| = M_0 |t - t_0| \quad \forall t \in J.$$

Induktionsschritt ($k \rightarrow k+1$): Aus der Induktionsvoraussetzung (2.14) folgt

$$\begin{aligned} \|v_{k+2}(t) - v_{k+1}(t)\| &= \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v_{k+1}(s)) ds - \left(u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v_k(s)) ds \right) \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, v_{k+1}(s)) - f(s, v_k(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v_{k+1}(s)) - f(s, v_k(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|v_{k+1}(s) - v_k(s)\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t M_0 L^k \frac{|s - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} ds \right| \\ &= \frac{M_0 L^{k+1}}{(k+1)!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^{k+1} ds \right| \\ &= M_0 L^{k+1} \frac{|t - t_0|^{k+2}}{(k+2)!} \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^{k+1} ds \right| &= \begin{cases} \int_{t_0}^t (s - t_0)^{k+1} ds = \left[\frac{1}{k+2} (s - t_0)^{k+2} \right]_{s=t_0}^t, & t \geq t_0 \\ \int_t^{t_0} (t_0 - s)^{k+1} ds = \left[-\frac{1}{k+2} (t_0 - s)^{k+2} \right]_{s=t}^{t_0}, & t < t_0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{k+2} |t - t_0|^{k+2} \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

verwendet.

Schritt 2. $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall k, l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k, l \geq N : \|v_l - v_k\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (2.15)$$

Fall 1: ($L = 0$). Aus (2.14) folgt $u_0 =: v_0(t) = v_k(t)$ für alle $t \in J$ und $k \in \mathbb{N}$, also $\|v_l - v_k\|_\infty = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ und somit (2.15).

Fall 2: ($L > 0$). Zunächst folgt für $R := L|J|$ aus (2.14)

$$\|v_{k+1}(t) - v_k(t)\| \leq \frac{M_0 (L|t - t_0|)^{k+1}}{L (k+1)!} \leq \frac{M_0 R^{k+1}}{L (k+1)!} \quad \forall t \in J \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Konvergenz der Exponentialreihe zu $e^R := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^j}{j!}$ besagt

$$S_n := \sum_{j=0}^n \frac{R^j}{j!} \rightarrow e^R \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy Folge, d.h.

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists N = N(\tilde{\varepsilon}) > 0 \forall l \geq k \geq N : \\ |S_l - S_k| = \sum_{j=0}^l \frac{R^j}{j!} - \sum_{j=0}^k \frac{R^j}{j!} = \sum_{j=k+1}^l \frac{R^j}{j!} = \sum_{j=k}^{l-1} \frac{R^{j+1}}{(j+1)!} \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon \frac{L}{M_0}$, dann gilt

$$\exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall l \geq k \geq N : \frac{M_0}{L} \sum_{j=k}^{l-1} \frac{R^{j+1}}{(j+1)!} \leq \varepsilon.$$

Daraus erhalten wir

$$\|v_l(t) - v_k(t)\| = \left\| \sum_{j=k}^{l-1} (v_{j+1}(t) - v_j(t)) \right\| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\| \\ \leq \frac{M_0}{L} \sum_{j=k}^{l-1} \frac{R^{j+1}}{(j+1)!} \leq \varepsilon \quad \forall t \in J \forall l \geq k \geq N(\varepsilon).$$

Bilden wir nun das Supremum über $t \in J$, so folgt (2.15).

Schritt 3. Es gibt ein $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$, dass die Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad t \in J \quad (2.16)$$

löst. Diese Funktion u erfüllt $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ und löst die Anfangswertaufgabe (2.4).

Da $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ (wegen $J \subseteq \mathbb{R}$ kompakt) ein Banachraum und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (wegen (2.15)) eine Cauchy-Folge in $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist, konvergiert diese Folge, d.h.

$$\exists u \in C(J, \mathbb{R}^n) : \|u - v_k\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

also gilt (2.12). Für dieses u betrachten wir nun die rechte Seite von (2.16). Die punktweise Abschätzung

$$\left\| u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - v_{k+1}(t) \right\| \\ = \left\| u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - \left(u_0 - \int_{t_0}^t f(s, v_k(s)) ds \right) \right\| \\ = \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v_k(s))) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v_k(s))\| ds \right| \\ \leq L \left| \int_{t_0}^t \|u(s) - v_k(s)\| ds \right| \leq L \max_{t \in J} |t - t_0| \|u - v_k\|_\infty \quad \forall t \in J \forall k \in \mathbb{N}$$

liefert uns

$$\left\| u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - v_{k+1} \right\|_\infty = \sup_{t \in J} \left\| u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - v_{k+1}(t) \right\|$$

$$\leq L \max_{t \in J} |t - t_0| \|u - v_k\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty.$$

Daraus erhalten wir

$$\|u - v_k\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad \left\| u_0 - \int_{t_0}^{\cdot} f(s, u(s)) ds - v_k \right\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Limes in $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ gilt

$$0 = \left\| u_0 - \int_{t_0}^{\cdot} f(s, u(s)) ds - u(\cdot) \right\|_\infty = \sup_{t \in J} \left\| u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - u(t) \right\|$$

und somit löst $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ die Integralgleichung (2.16). Nach Lemma 2.1(2) gilt $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ und u löst die Anfangswertaufgabe (2.4). Damit ist die Existenz gezeigt.

Schritt 4. u ist die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe (2.4).

Sei $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine weitere Lösung von (2.4), dann löst v nach Lemma 2.1(1) die Integralgleichung (2.16). Durch vollständiger Induktion zeigen wir

$$\|v_k(t) - v(t)\| \leq \overline{M} L^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in J \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.17)$$

wobei $\overline{M} := \sup_{t \in J} \|f(t, v(t))\|$.

Induktionsanfang ($k = 0$):

$$\begin{aligned} \|v_0(t) - v(t)\| &= \left\| u_0 - \left(u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right) \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s))\| ds \right| \leq \overline{M} |t - t_0| \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

Induktionsschritt ($k \rightarrow k+1$):

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}(t) - v(t)\| &= \left\| u_0 - \int_{t_0}^t f(s, v_k(s)) ds - \left(u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right) \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, v_k(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v_k(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|v_k(s) - v(s)\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \overline{M} L^k \frac{|s - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} ds \right| \\ &= \overline{M} L^{k+1} \frac{|t - t_0|^{k+2}}{(k+2)!} \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

Für $R := L|J|$ gilt wegen (2.17)

$$\|v_k(t) - v(t)\| \leq \frac{\overline{M}}{L} \frac{(L|t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{\overline{M}}{L} \frac{R^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in J \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Da die Exponentialreihe $e^R := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^j}{j!}$ konvergiert, bildet die $\left(\frac{R^j}{j!}\right)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. Daher gilt

$$\|v_k - v\|_{\infty} \leq \frac{\overline{M} R^{k+1}}{L (k+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wegen

$$\|v_k - u\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|v_k - v\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

erhalten wir aus der Eindeutigkeit des Limes in $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty})$

$$0 = \|u - v\|_{\infty} = \sup_{t \in J} \|u(t) - v(t)\|, \quad \text{also } v(t) = u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(t) \quad \forall t \in J.$$

□

Bemerkung 2.14. (1) Wir weisen darauf hin, dass wir die Abschätzung (2.17) nicht für den Nachweis von (2.14) verwenden können. Dies liegt daran, dass die Konstante $\overline{M} := \sup_{t \in J} \|f(t, v(t))\|$ in (2.17) von einer Lösung v von (2.4) abhängt, über deren Existenz wir in Schritt 1 noch keinerlei Kenntnis haben.

(2) Wir leiten nun eine a-priori Abschätzung her: Genauer zeigen wir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \geq \tilde{N} : \|u(t) - v_k(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in J.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (2.14) gilt

$$\|v_l(t) - v_k(t)\| \leq \frac{M_0}{L} \sum_{j=k}^{l-1} \frac{(L|t-t_0|)^{j+1}}{(j+1)!} \quad \forall t \in J \quad \forall l \geq k \geq N(\varepsilon).$$

Wählen wir $k \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass $k \geq N(\varepsilon)$ und

$$M_0 L^k e^{L|t-t_0|} \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \varepsilon$$

gilt, so liefert der Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ die **a-priori Abschätzung (Fehlerabschätzung)**

$$\begin{aligned} \|u(t) - v_k(t)\| &\leq \frac{M_0}{L} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(L|t-t_0|)^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{M_0}{L} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(L|t-t_0|)^j}{j!} \\ &= \frac{M_0}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - \sum_{j=0}^k \frac{(L|t-t_0|)^j}{j!} \right) \leq \frac{M_0}{L} e^{L|t-t_0|} \frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= M_0 L^k e^{L|t-t_0|} \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M_0}{L} e^R \frac{R^{k+1}}{(k+1)!} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei lässt sich die vorletzte Ungleichung leicht einsehen: Aus der Taylorformel für $e^x = \exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ erhalten wir

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^k \frac{\exp^{(j)}(0)}{j!} (x-0)^j + \int_0^x \frac{(x-\tau)^k}{k!} \exp^{(k+1)}(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} + \int_0^x \frac{(x-\tau)^k}{k!} \exp(\tau) d\tau.$$

Somit entspricht die Differenz der Restgliedabschätzung der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \left\| \exp(x) - \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} \right\| &= \left\| \int_0^x \frac{(x-\tau)^k}{k!} \exp(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \exp(x) \int_0^x \frac{(x-\tau)^k}{k!} d\tau = \exp(x) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

2.4 Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Die Forderung in Satz 2.11, dass f Lipschitz-beschränkt auf ganz $J \times \mathbb{R}^n$ (bzgl. der 2. Variablen) ist, erweist sich im Allgemeinen als große Einschränkung. Der Grund dafür ist, dass nach Lemma 2.9 die Ableitung $\|D_v f(t, v)\|$ für alle $t \in J$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ beschränkt sein muss. Dass dies nicht grundsätzlich zutrifft, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.15. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u'(t) &= (u(t))^2 - t, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Hier ist $f(t, v) = v^2 - t$. Da $D_v f(t, v) = 2v$ für $v \in \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, können wir den Satz 2.11 nicht anwenden.

Motiviert durch Beispiel 2.15 benötigen wir eine lokale Version von Satz 2.11.

Satz 2.16 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf, lokale Version). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}^n$,

$$Q_\beta := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - u_0\| \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{für } \beta > 0,$$

und sei $f \in C(J \times Q_\beta, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q_\beta$ (bezüglich der 2. Variablen) mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2.4) genau eine **lokale Lösung** $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, wobei

$$I := J \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad \alpha := \frac{\beta}{M}, \quad M := \max_{(t,v) \in J \times Q_\beta} \|f(t, v)\|.$$

Für die Picard-Iterierten aus (2.11) gilt die **a-priori Abschätzung (Fehlerabschätzung)**

$$\|u(t) - v_k(t)\| \leq ML^k \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in I \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.18)$$

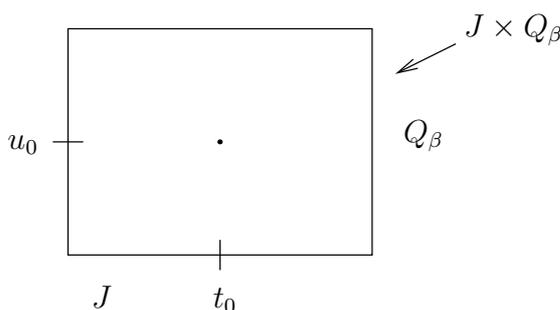


Abbildung 2.5: Der Quader $J \times Q_\beta$

Bemerkung 2.17. (1) Die globale Version in Satz 2.11 lieferte uns eine **globale** Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ von (2.4), d. h. eine Lösung auf ganz $J \subseteq \mathbb{R}$. Im Gegensatz dazu liefert uns die lokale Version in Satz 2.16 nur eine **lokale** Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ von (2.4), d. h. eine Lösung auf einem Teilintervall $I \subseteq J$.

(2) Interpretation von α : Sei $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2.4) auf einem kompakten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Nach Lemma 2.1 erfüllt u die Integralgleichung (2.2) und daher gilt

$$\|u(t) - u_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \right| \leq M |t - t_0| \quad \forall t \in J,$$

wobei M ist die maximale Steigung der Lösung bezeichnet. Fordern wir nun für $t \in J$ die Bedingung $M |t - t_0| \leq \beta$, also $|t - t_0| \leq \frac{\beta}{M} =: \alpha$, so gilt sogar

$$\|u(t) - u_0\| \leq M |t - t_0| \leq \beta \quad \forall t \in I,$$

also $u(t) \in Q_\beta$. Somit sorgt $\alpha = \frac{\beta}{M}$ dafür, dass der Graph $\{(t, u(t)) \mid t \in I\}$ der Lösung u die Menge $I \times Q_\beta$ nicht verlässt, siehe Abbildung 2.6. Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Lösung u (bedingt durch die Wahl von α) die Menge $I \times Q_\beta$ am rechten und linken Rand, aber niemals am oberen oder unteren Rand verlässt.

Wo verlasse ich den Quader?

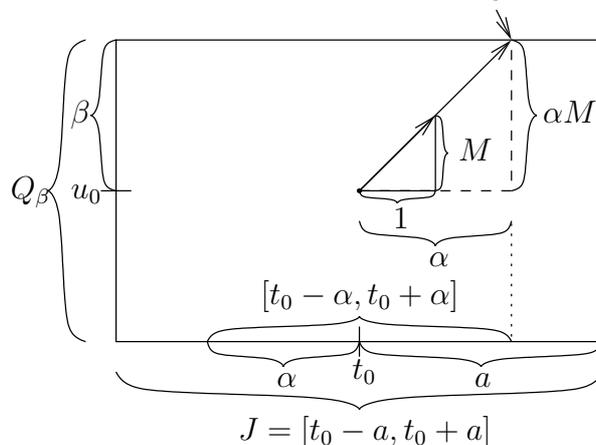


Abbildung 2.6: Interpretation von α für $J = [t_0 + a, t_0 - a]$, $a > 0$

Beispiel 2.18. Betrachte die Anfangswertaufgabe aus Beispiel 2.15

$$u'(t) = (u(t))^2 - t, \quad (2.19a)$$

$$u(0) = 0, \quad (2.19b)$$

mit $f(t, v) = v^2 - t$. Wir wollen auf diese Anfangswertaufgabe Satz 2.16 speziell für $J = [-1, 1]$ und $Q_1 = [-1, 1]$ mit $\beta = 1$ anwenden. Offensichtlich ist $f \in C(J \times Q_1, \mathbb{R})$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q_1$ (bzgl. v) mit Lipschitz-Konstante $L = 2$, denn

$$\begin{aligned} |f(t, v) - f(t, w)| &= |v^2 - w^2| = |v + w| |v - w| \\ &\leq (|v| + |w|) |v - w| \leq 2 |v - w| \quad \forall t \in J \forall v, w \in Q_1. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 2.16 mit den Konstanten

$$M := \max_{(t,v) \in J \times Q_1} |f(t, v)| \leq \max_{(t,v) \in J \times Q_1} (|v|^2 + |t|) = 1 + 1 = 2$$

und

$$\alpha = \frac{1}{2} \implies I := J \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

anwendbar und liefert eine eindeutige Lösung $u \in C(I, \mathbb{R})$ des Anfangswertproblems (2.19). Aus der a-priori Abschätzung folgt weiter

$$|u(t) - v_k(t)| \leq 2 \cdot 2^k \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} \quad \forall t \in I \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. (von Satz 2.16). Der Beweis von Satz 2.16 verläuft sehr ähnlich zu dem von Satz 2.11. Wir lassen ihn daher aus und beweisen ausschließlich (2.18), also die gleichmäßige Konvergenz der Picard-Iterierten auf I : Zunächst zeigen wir durch vollständige Induktion

$$\{(t, v_k(t)) \mid t \in I\} \subseteq I \times Q_\beta \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.20)$$

Induktionsanfang ($k = 0$): Offensichtlich gilt $(t, v_0(t)) = (t, u_0) \in I \times Q_\beta$.

Induktionsschritt ($k \rightarrow k + 1$): Nach der Induktionsvoraussetzung (2.20) gilt $v_k(t) \in Q_\beta$ für alle $t \in I$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}(t) - u_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, v_k(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v_k(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \leq M\alpha = \beta \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Damit ist (2.20) bewiesen und daher gilt

$$v_k(t) \in Q_\beta \quad \forall t \in I \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Fehlerabschätzung folgt nun aus (2.17)

$$\|u(t) - v_k(t)\| \leq \sup_{t \in I} \|f(t, u(t))\| L^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq ML^k \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in I \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

□

Die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf, vgl. Satz 2.16, kann auch in der folgenden qualitativen Fassung angegeben werden.

Satz 2.19 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz). Sei $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, u_0) \in \Omega_0$ und sei $f \in C(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-beschränkt auf Ω_0 (bezüglich der 2. Variablen) mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2.4) genau eine **lokale** Lösung, d. h. es gibt ein $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$ derart, dass die Anfangswertaufgabe (2.4) auf dem Intervall $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ besitzt.

Beweis. Konstruiere einen Quader $J \times Q_\beta$ in Ω_0 , vgl. Abbildung 2.7, und wende Satz 2.16 an. \square

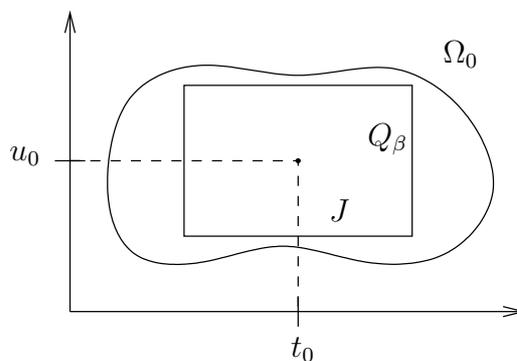


Abbildung 2.7: Der Quader $J \times Q_b$ in Ω_0

2.5 Maximales Existenzintervall

Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz 2.19 liefert uns eine eindeutige lokale Lösung u der Anfangswertaufgabe (2.4), d. h. eine Lösung auf einem endlichen kompakten Existenzintervall I der Form $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Im Folgenden gehen wir der Frage nach, ob sich dieses Intervall I eventuell vergrößern lässt.

Dazu sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, u_0) \in \Omega$ und $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Wir nehmen an, es gibt eine Umgebung $\Omega_0 \subseteq \Omega$ um (t_0, u_0) (d. h. $(t_0, u_0) \in \Omega_0$), so dass f zusätzlich Lipschitz-beschränkt auf Ω_0 (bezüglich der 2. Variablen) ist. Dann liefert uns Satz 2.19 eine eindeutige lokale Lösung der Anfangswertaufgabe (2.4), d. h. es gibt ein $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ der Anfangswertaufgabe (2.4) auf $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, vgl. Abbildung 2.8. Nun stellt sich die folgende Frage: Warum sollte die Lösung in $t_0 - \alpha$ oder $t_0 + \alpha$ einfach enden? Können wir den lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz 2.19 nicht einfach erneut mit den neuen Anfangsdaten $(t_0 - \alpha, u(t_0 - \alpha))$ oder $(t_0 + \alpha, u(t_0 + \alpha))$ anwenden und die Lösungen dann zusammensetzen? Dass dies in der Tat möglich ist, zeigen wir in diesem Abschnitt.

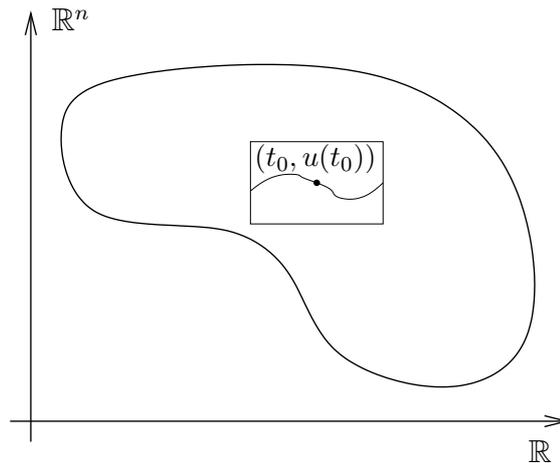


Abbildung 2.8: Eindeutige lokale Lösung mit Satz 2.19

Definition 2.20 (Lokal Lipschitz-beschränkt). Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, v) \mapsto f(t, v)$$

heißt **lokal Lipschitz-beschränkt** in Ω (bezüglich der 2. Variablen), falls

$$\forall (t_0, u_0) \in \Omega \exists U \subseteq \Omega \text{ Umgebung von } (t_0, u_0) : f \text{ ist Lipschitz-beschränkt in } U \\ \text{(bezüglich der 2. Variablen).}$$

Bemerkung 2.21. Nach Definition 2.20 und Lemma 2.9 gilt:

$$f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ und } D_v f \in C(\Omega, \mathbb{R}^{n,n}) \implies f \text{ lokal Lipschitz-beschränkt in } \Omega \\ \text{(bezüglich der 2. Variablen)}$$

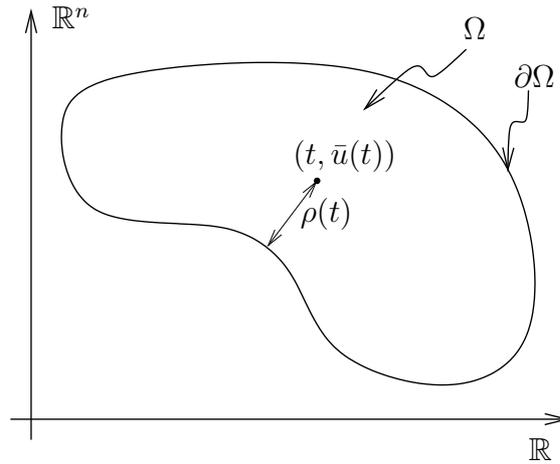
Der folgende globale Fortsetzungssatz zeigt, dass sich die Lösung von (2.4) bis zum Rand $\partial\Omega$ von Ω fortsetzen lässt. Der **Rand von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$** ist definiert durch

$$\partial\Omega := \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c} = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists w_k \notin \Omega \wedge \exists v_k \in \Omega : w_k \rightarrow w, v_k \rightarrow w \text{ für } k \rightarrow \infty\}$$

und der **Abstand eines Punktes auf dem Graphen von u zum Rand von Ω**

$$\rho(t) := \text{dist}((t, u(t)), \partial\Omega) := \inf_{w \in \partial\Omega} \|(t, u(t)) - w\|, \quad (2.21)$$

siehe Abbildung 2.9. Falls $\partial\Omega = \emptyset$ (also $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ oder $\Omega = \emptyset$), so setzen wir $\rho(t) := \infty$. Der Beweis des Satzes wird nicht durchgeführt und wir verweisen stattdessen auf [1, Satz 2.4.1 und 2.5.1].

Abbildung 2.9: Rand von Ω und Abstand von $(t, u(t))$ zum Rand $\partial\Omega$

Satz 2.22 (Globaler Fortsetzungssatz). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, u_0) \in \Omega$ und sei $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-beschränkt in Ω (bezüglich der 2. Variablen). Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2.4) genau eine **nicht fortsetzbare** Lösung $u \in C^1(I_{\max}, \mathbb{R}^n)$ auf einem offenen **maximalen Existenzintervall** $I_{\max} = (t_-, t_+)$, wobei $-\infty \leq t_- < t_0 < t_+ \leq +\infty$.

Für $t \rightarrow t_+$ bzw. $t \rightarrow t_-$ nähert sich $(t, u(t))$ dem Rand $\partial\Omega$ des Definitionsbereiches Ω im folgenden Sinne: Mit $\rho(t) := \text{dist}((t, u(t)), \partial\Omega)$ aus (2.21) gilt

$$\min\left(\rho(t), \frac{1}{\|(t, u(t))\|}\right) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow t_{\pm}. \quad (2.22)$$

Beispiel 2.23. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = (u(t))^2, \quad (2.23a)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (2.23b)$$

Hier ist $f(t, v) = v^2$.

- a) Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung: Sei $J = \mathbb{R}$, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}$ und $Q = Q_1 = (u_0 - 1, u_0 + 1)$, dann gilt $f \in C(J \times \overline{Q}, \mathbb{R})$ und $D_v f \in C(J \times Q, \mathbb{R})$. Somit ist f wegen

$$|D_v f(t, v)| = 2|v| \leq 2 \max\{|u_0 - 1|, |u_0 + 1|\} =: L \quad \forall (t, v) \in J \times \overline{Q}$$

nach Lemma 2.9 Lipschitz-beschränkt in $J \times \overline{Q}$ (bezüglich der 2. Variablen). Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz 2.19 mit $\Omega_0 = J \times Q$ besitzt die Anfangswertaufgabe (2.23) eine eindeutige lokale Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ auf $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ für ein $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$. Beachte, dass f nicht auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Lipschitz-beschränkt (bzgl. v) ist und somit lediglich die Voraussetzungen des lokalen Satzes 2.19 (bzw. Satz 2.16) und nicht die des globalen Satzes 2.11 erfüllt sind.

- b) Lösungsdarstellung: Die Lösung von (2.23) ist gegeben durch

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } u_0 = 0, \\ \frac{1}{\frac{1}{u_0} - (t - t_0)} & , \text{ falls } u_0 \neq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Beweis (durch Probe): Der Fall $u_0 = 0$ ist trivial. Sei $u_0 \neq 0$, dann gilt

$$u'(t) = \frac{0 \cdot \left(\frac{1}{u_0} - (t - t_0)\right) - (-1) \cdot 1}{\left(\frac{1}{u_0} - (t - t_0)\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{u_0} - (t - t_0)\right)^2} = (u(t))^2,$$

$$u(t_0) = \frac{1}{\frac{1}{u_0}} = u_0.$$

Man beachte hierbei, dass

$$I_{\max} = \begin{cases} \left(-\infty, \frac{1}{u_0} + t_0\right) & , \text{ falls } u_0 > 0, \\ \left(-\infty, +\infty\right) & , \text{ falls } u_0 = 0, \\ \left(\frac{1}{u_0} + t_0, +\infty\right) & , \text{ falls } u_0 < 0, \end{cases}$$

gilt. In Fall $u_0 \neq 0$ besitzt die Lösung u eine Singularität bei $\frac{1}{u_0} + t_0$, siehe Abbildung 2.10.

- c) Fortsetzung der Lösung und maximales Existenzintervall: Wir wollen den Fortsetzungssatz 2.22 anwenden. Sei $\Omega = J \times Q$ mit $J = \mathbb{R}$ und $Q = \mathbb{R}$. Wegen $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und $D_v f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ ist f (nach Bemerkung 2.21) lokal Lipschitz-beschränkt in Ω (bzgl. v). Daher besitzt die Anfangswertaufgabe (2.23) für alle $(t_0, u_0) \in \Omega$ nach Satz 2.22 eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $u \in C^1(I_{\max}, \mathbb{R})$ mit $I_{\max} = (t_-, t_+)$ und $-\infty < t_- < t_0 < t_+ < +\infty$. Wir wollen t_- und t_+ bestimmen: Um die Konvergenz in (2.22) nachzuweisen, betrachten wir speziell die Maximumsnorm $\|z\|_{\infty} := \max_{i=1, \dots, d} |z_i|$ auf \mathbb{R}^d für $d = 2$. Wegen $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt $\partial\Omega = \emptyset$, also $\rho(t) = \infty$ und somit

$$\min \left(\rho(t), \frac{1}{\|(t, u(t))\|_{\infty}} \right) = \frac{1}{\|(t, u(t))\|_{\infty}} = \frac{1}{\max\{|t|, |u(t)|\}}.$$

1. Fall: ($u_0 > 0$). Sei $u_0 > 0$, dann folgt für $t_+ := \frac{1}{u_0} + t_0$

$$\lim_{t \nearrow t_+} \frac{1}{\max\{|t|, |u(t)|\}} = \lim_{t \nearrow t_+} \frac{1}{\max \left\{ |t|, \left| \left(\frac{1}{u_0} - (t - t_0) \right)^{-1} \right| \right\}} = 0,$$

weil $\lim_{t \nearrow t_+} \frac{1}{\left| \frac{1}{u_0} - (t - t_0) \right|} = \infty$. Für $t < t_0$ ist die Funktion $u(t)$ gleichmäßig beschränkt. Daher gilt für $t_- := -\infty$

$$\lim_{t \searrow t_-} \frac{1}{\max\{|t|, |u(t)|\}} = \lim_{t \searrow t_-} \frac{1}{|t|} = 0,$$

da $\lim_{t \searrow t_-} |t| = \infty$. Damit ist $I_{\max} = (t_-, t_+) = (-\infty, \frac{1}{u_0} + t_0)$ für $u_0 > 0$. Die Fälle $u_0 = 0$ und $u_0 < 0$ lassen sich ähnlich behandeln.

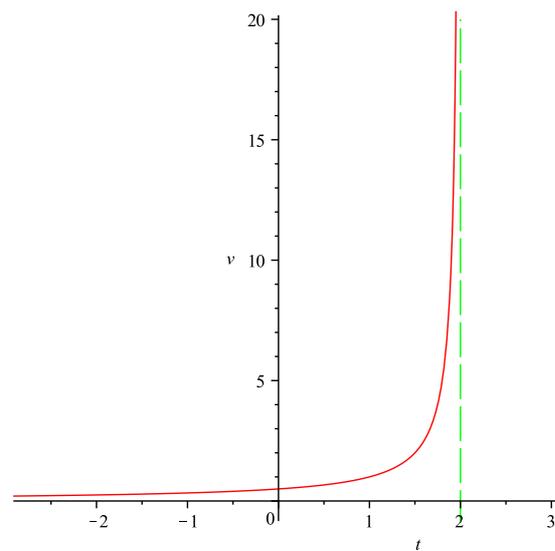


Abbildung 2.10: Bei $t = 2$ explodiert die Lösung zum Anfangswert $u(0) = \frac{1}{2}$. Es gilt also $\lim_{t \nearrow 2} \frac{1}{\max(|t|, |u(t)|)} = 0$.

3 Lösungsverhalten und Lösungsmethoden

3.1 Skalare autonome Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir Anfangswertaufgaben für skalare (d. h. $n = 1$) autonome (d. h. von t unabhängige) Differentialgleichungen

$$u'(t) = f(u(t)), \quad (3.1a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.1b)$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times U$ und $f \in C(U, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-beschränkt in U seien. Da diese Voraussetzungen mit denen des globalen Fortsetzungssatzes 2.22 übereinstimmen, besitzt die Anfangswertaufgabe (3.1) in diesem Abschnitt stets eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $u \in C^1(I_{\max}, \mathbb{R})$.

Nachdem wir uns im vorangegangenen Kapitel intensiv mit der Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen für Anfangswertprobleme befasst haben, wollen wir in diesem Abschnitt der Frage nachgehen, welche Informationen wir über die Lösung erhalten können, ohne die Lösung explizit zu kennen. Eine wesentliche Rolle werden in Folgenden sogenannte Gleichgewichte spielen:

Definition 3.1 (Gleichgewicht). Ein Punkt $\bar{u} \in \mathbb{R}$ heißt **Gleichgewicht** (oder: **stationärer Punkt**) der Differentialgleichung (3.1a), falls $f(\bar{u}) = 0$.

Bemerkung 3.2. Falls $\bar{u} \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewicht der Differentialgleichung (3.1a) ist, dann besitzt die Anfangswertaufgabe (3.1) mit Startwert $u_0 = \bar{u}$ die Lösung

$$u(t) = \bar{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

denn

$$u'(t) = 0 = f(\bar{u}) = f(u(t)) \quad \text{und} \quad u(t_0) = \bar{u} = u_0.$$

Das maximale Existenzintervall ist also $I_{\max} = \mathbb{R}$. Dies folgt aus dem globalen Fortsetzungssatz 2.22: Wegen $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt $\partial\Omega = \emptyset$, also $\rho(t) = \infty$. Unter Verwendung der Maximumsnorm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\infty}$ erhalten wir daraus

$$\min \left(\rho(t), \frac{1}{\|(t, u(t))\|_{\infty}} \right) = \frac{1}{\max\{|t|, |u(t)|\}} = \frac{1}{\max\{|t|, |\bar{u}|\}},$$

somit die Konvergenz

$$\lim_{t \nearrow t_+} \min \left(\rho(t), \frac{1}{\|(t, u(t))\|_{\infty}} \right) = \lim_{t \nearrow t_+} \frac{1}{\max\{|t|, |\bar{u}|\}} = 0,$$

$$\lim_{t \searrow t_-} \min \left(\rho(t), \frac{1}{\|(t, u(t))\|_\infty} \right) = \lim_{t \searrow t_-} \frac{1}{\max\{|t|, |\bar{u}|\}} = 0$$

(für jedes $t_+, t_- \in \mathbb{R}$) und folglich $t_- = -\infty, t_+ = +\infty$.

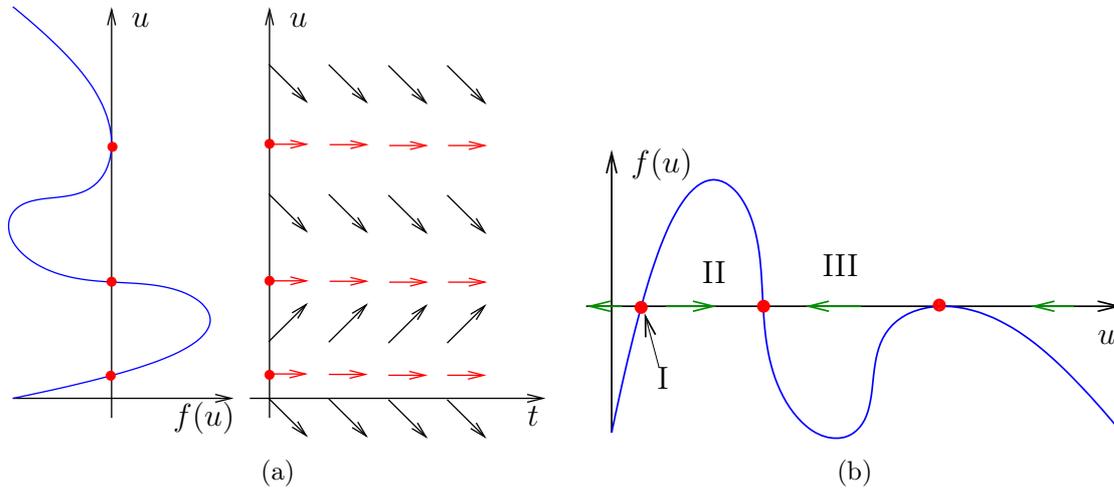


Abbildung 3.1: Das Richtungsfeld (a) und das Phasenbild (b). Jeweils in rot sind die Gleichgewichte eingezeichnet.

Qualitatives Lösungsverhalten: Das qualitative Verhalten von Lösungen der Anfangswertaufgabe (3.1) kann man gut am Graphen von f ablesen. Wir zeichnen dazu einmal das Richtungsfeld zusammen mit dem an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen von f (vgl. Abbildung 3.1(a)) und das Phasenbild zusammen mit dem Graphen von f (vgl. Abbildung 3.1(b)). Es gibt drei Alternativen (vgl. Abbildung 3.1(b)):

Fall 1: $f(u_0) = 0 \Rightarrow I_{\max} = \mathbb{R}, u(t) = u_0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$

Fall 2: $f(u_0) > 0 \Rightarrow u'(t) = f(u(t)) > 0 \quad \forall t \in I_{\max},$

Fall 3: $f(u_0) < 0 \Rightarrow u'(t) = f(u(t)) < 0 \quad \forall t \in I_{\max}.$

Beweis. zu Fall 1: Dieser Fall wurde in Bemerkung 3.2 bewiesen.

zu Fall 2: Sei $f(u_0) > 0$ und sei $u \in C^1(I_{\max}, \mathbb{R})$ die nach Satz 2.22 eindeutige nicht fortsetzbare Lösung der Anfangswertaufgabe (3.1). Angenommen, es gibt ein $\tau \in I_{\max}$ mit $f(u(\tau)) \leq 0$. Da $f(u(\cdot))$ eine stetige Funktion ist, gibt es dann nach dem Zwischenwertsatz auch einen Wert $t_1 \in I_{\max}$ mit $t_1 \neq t_0$ und

$$u'(t_1) = f(u(t_1)) = 0. \quad (3.2)$$

Daher lösen sowohl u als auch die konstante Funktion

$$v(t) := u(t_1), \quad t \in \mathbb{R}$$

die Anfangswertaufgabe

$$w'(t) = f(w(t)), \quad t \in I_{\max}, \quad w(t_1) = u(t_1).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen stimmen daher u und v auf I_{\max} überein. Insbesondere gilt

$$f(u_0) = f(u(t_0)) = f(v(t_0)) = f(u(t_1)) = 0,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung $f(u_0) > 0$. Damit ist die Annahme (3.2) falsch und es gilt

$$u'(t) = f(u(t)) > 0 \quad \forall t \in I_{\max}.$$

zu Fall 3: Dieser Beweis verläuft analog zu dem von Fall 2. \square

Offenbar ist die Lösung u im Fall 1 konstant. Im Fall 2 ist die Lösung u (wegen $u'(t) > 0$) streng monoton wachsend. Analog ist die Lösung u im Fall 3 (wegen $u'(t) < 0$) streng monoton fallend. Im Fall 2 und im Fall 3 hängt das weitere Verhalten von $u(t)$ für $t \rightarrow t_{\pm}$ davon ab, ob es eine Nullstelle von f in (u_0, ∞) bzw. in $(-\infty, u_0)$ gibt. Anschaulich kann man sich das Verhalten leicht anhand von Abbildung 3.1 klar machen. Im Folgenden betrachten wir nur den Fall $t \rightarrow t_+$. Die Untersuchungen für $t \rightarrow t_-$ sind ganz analog und eine einfache Übung.

Fall 2a: $f(u_0) > 0$ und $\exists \bar{u} \in (u_0, \infty)$ minimal: $f(\bar{u}) = 0$
 $\Rightarrow [t_0, \infty) \subseteq I_{\max}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u}$,

Fall 2b: $f(u_0) > 0$ und $f(v) > 0 \quad \forall v \in (u_0, \infty)$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_+} u(t) = \infty$, wobei $t_+ < \infty$ und $t_+ = \infty$ möglich ist,

Fall 3a: $f(u_0) < 0$ und $\exists \bar{u} \in (-\infty, u_0)$ maximal: $f(\bar{u}) = 0$
 $\Rightarrow [t_0, \infty) \subseteq I_{\max}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u}$,

Fall 3b: $f(u_0) < 0$ und $f(v) < 0 \quad \forall v \in (-\infty, u_0)$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_+} u(t) = -\infty$, wobei $t_+ < \infty$ und $t_+ = \infty$ möglich ist.

Beweis. zu Fall 2a: Sei $f(u_0) > 0$ und sei $\bar{u} \in (u_0, \infty)$ mit $f(\bar{u}) = 0$ minimal (d. h. $f(v) > 0$ für alle $u_0 \leq v < \bar{u}$). Da u streng monoton wachsend ist, gilt

$$u_0 < u(t) \quad \forall t \in I_{\max} \text{ mit } t > t_0.$$

Andererseits gilt aber auch

$$u(t) < \bar{u} \quad \forall t \in I_{\max} \text{ mit } t > t_0,$$

denn sonst liefert Fall 2 einen Widerspruch. Damit ist u für $t > t_0$ beschränkt und der globale Fortsetzungssatz 2.22 liefert $[t_0, \infty) \subseteq I_{\max}$. Da $u(t)$ für $t \in [t_0, \infty)$ beschränkt und monoton ist, konvergiert u für $t \rightarrow \infty$, d.h. es existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) =: \tilde{u} \in (u_0, \bar{u}]$. Es bleibt zu zeigen, dass $f(\tilde{u}) = 0$ und $\tilde{u} = \bar{u}$ gilt. Aus dem Mittelwertsatz 2.8 folgt

$$u(t+1) - u(t) = \int_0^1 u'(t+s) ds = \int_0^1 f(u(t+s)) ds,$$

und der Übergang zum Limes $t \rightarrow \infty$ liefert wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) =: \tilde{u}$

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{u} - \tilde{u} &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t+1) - u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 f(u(t+s)) ds \\ &= \int_0^1 \lim_{t \rightarrow \infty} f(u(t+s)) ds = \int_0^1 f(\lim_{t \rightarrow \infty} u(t+s)) ds = \int_0^1 f(\tilde{u}) ds = f(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Aus der Minimalität von \bar{u} folgt wegen $\tilde{u} \in (u_0, \bar{u}]$ die Gleichheit $\tilde{u} = \bar{u}$. \square

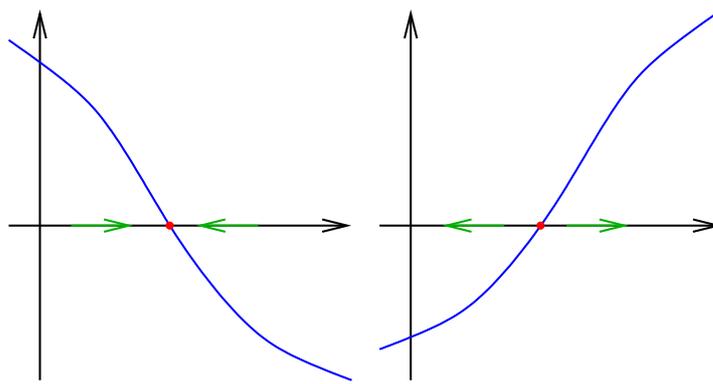
Definition 3.3 (anziehend, abstoßend). Ein Gleichgewicht $\bar{u} \in \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (3.1a) heißt

- **anziehend**, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

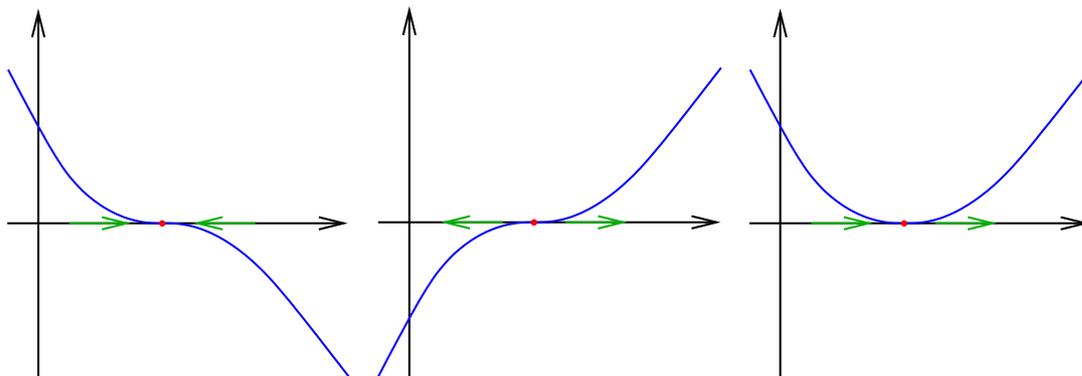
$$|u_0 - \bar{u}| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u},$$

- **abstoßend**, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|u_0 - \bar{u}| < \delta, u_0 \neq \bar{u} \implies \exists t > 0 : |u(t) - \bar{u}| \geq \delta.$$



(a) $f(\bar{u}) = 0, f'(\bar{u}) < 0 \Rightarrow \bar{u}$ anziehend
 (b) $f(\bar{u}) = 0, f'(\bar{u}) > 0 \Rightarrow \bar{u}$ abstoßend



(c) $f(\bar{u}) = 0, f'(\bar{u}) = 0$ anziehend möglich
 (d) $f(\bar{u}) = 0, f'(\bar{u}) = 0$ abstoßend möglich
 (e) $f(\bar{u}) = 0, f'(\bar{u}) = 0$ weder anziehend noch abstoßend möglich

Abbildung 3.2: Qualitative Eigenschaften von Gleichgewichten

Satz 3.4 (Hinreichende Bedingungen für Anziehung bzw. Abstoßung).

Sei $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-beschränkt und $\bar{u} \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f .

Fall 1 Wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(v) \begin{cases} > 0, & \bar{u} - \varepsilon \leq v < \bar{u}, \\ < 0, & \bar{u} < v \leq \bar{u} + \varepsilon, \end{cases}$$

dann ist das Gleichgewicht \bar{u} anziehend.

Fall 2 Wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(v) \begin{cases} < 0, & \bar{u} - \varepsilon \leq v < \bar{u}, \\ > 0, & \bar{u} < v \leq \bar{u} + \varepsilon, \end{cases}$$

dann ist das Gleichgewicht \bar{u} abstoßend.

Für $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist $f'(\bar{u}) < 0$ hinreichend für Fall 1 (vgl. Abbildung 3.2(a)), und $f'(\bar{u}) > 0$ ist hinreichend für Fall 2 (vgl. Abbildung 3.2(b)).

Der Beweis im Fall 1 ergibt sich daraus, dass für Startwerte $\bar{u} - \varepsilon \leq u_0 < \bar{u}$ die Aussagen des obigen **Fall 2a** und für $\bar{u} < u_0 \leq \bar{u} + \varepsilon$ die des obigen **Fall 3a** zutreffen. Im Fall 2 liegen entsprechend das Lösungsverhalten von **Fall 3b** bzw. **Fall 2b** vor. Aus dem Vorzeichen von $f'(\bar{u})$ kann man (mit dem Mittelwertsatz) schließen, welcher der beiden Fälle 1 und 2 vorliegt.

Wir bemerken, dass im Fall $f(\bar{u}) = 0$, $f'(\bar{u}) = 0$ alles möglich ist, wie die Beispiele $f(v) = v^3$ und $f(v) = -v^3$ mit $\bar{u} = 0$ zeigen (vgl. Abbildung 3.2(c)-(e)). Das Gleichgewicht kann auch weder anziehend noch abstoßend sein.

Beispiel 3.5 (Populationsmodell). Betrachte die **logistische Differentialgleichung**

$$u'(t) = ku(t) \left(1 - \frac{u(t)}{M} \right).$$

Hierbei bezeichnen

$u(t)$: die Bevölkerungszahl (z. B. in Millionen) zur Zeit t ,

k : die Wachstumsrate (für kleine Populationen),

M : die Maximalpopulation (die „nachhaltig“ tragbar ist).

wobei $k, M > 0$.

a) Berechnung der Gleichgewichte: Betrachte $f(v) := kv \left(1 - \frac{v}{M} \right)$, dann gilt

$$0 \stackrel{!}{=} f(\bar{u}) = k\bar{u} \left(1 - \frac{\bar{u}}{M} \right) \implies \bar{u} = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{u} = M.$$

b) Eigenschaften der Gleichgewichte: Zunächst gilt $f'(v) = k - \frac{2kv}{M}$. Für $\bar{u} = 0$ (Population ist ausgestorben) gilt

$$f'(\bar{u}) = f'(0) = k > 0 \implies \bar{u} = 0 \text{ ist abstoßendes Gleichgewicht.}$$

Für $\bar{u} = M$ (Population hat die maximal tragbare Größe erreicht) gilt

$$f'(\bar{u}) = f'(M) = -k < 0 \implies \bar{u} = M \text{ ist anziehendes Gleichgewicht.}$$

Die Gleichgewichte und ihre Eigenschaften sind in Abbildung 3.3 veranschaulicht.

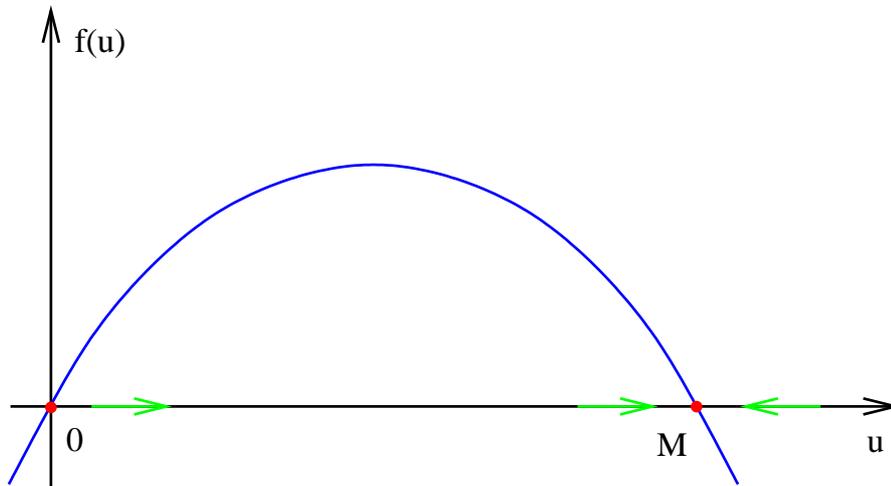


Abbildung 3.3: Gleichgewichte $\bar{u} = 0$ (abstoßend) und $\bar{u} = M$ (anziehend)

3.2 Trennung der Veränderlichen

Wir wollen jetzt ein Verfahren zur Lösung skalarer Differentialgleichungen kennenlernen, die die Besonderheit besitzen, dass die Variablen t und v durch die Beziehung $f(t, v) = g(t)h(v)$ voneinander getrennt sind.

Dazu betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = g(t)h(u(t)), \quad (3.3a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.3b)$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $Q \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times Q$, $g \in C(J, \mathbb{R})$ und $h \in C(Q, \mathbb{R})$ seien.

Methode der Trennung der Veränderlichen: (formale Rechnung zur Herleitung der Lösungsformel). Sei u eine Lösung von (3.3) auf einem Teilintervall $K \subseteq J$ mit $t_0 \in K$ und

$$h(u(t)) \neq 0 \quad \forall t \in K,$$

dann folgt durch Integration und Substitution für $t \in K$

$$\begin{aligned} u'(t) &= g(t)h(u(t)) && | \text{ umschreiben, Argument von } u \text{ unterdrücken} \\ \frac{du}{dt} &= g(t)h(u) && | \cdot dt \quad | : h(u) \\ \frac{1}{h(u)} du &= g(t)dt && | \text{ Integration} \\ \int \frac{1}{h(u)} du &= \int g(t)dt + C \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (3.3b) erhalten wir für $t \in K$

Trennung der Veränderlichen Formel:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)} dv = \int_{t_0}^t g(s) ds. \quad (3.4)$$

Durch Auflösung dieser Beziehung nach $u(t)$ finden wir dann eine Lösung der Anfangswertaufgabe (3.3). Dieses formale Rechnen mit Differentialen müssen wir noch rechtfertigen!

Beispiel 3.6. Betrachte die Anfangswertaufgabe aus Beispiel 2.23

$$u'(t) = (u(t))^2, \quad (3.5a)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (3.5b)$$

Hier ist $g(t) = 1$ und $h(v) = v^2$. Dies eingesetzt in (3.4) liefert für $u_0 \neq 0$ (denn $u_0^2 = h(u_0) = h(u(t_0)) \neq 0$)

$$-\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{u_0} = \left[-\frac{1}{v} \right]_{v=u_0}^{u(t)} = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v^2} dv \stackrel{(3.4)}{=} \int_{t_0}^t ds = [s]_{s=t_0}^t = t - t_0,$$

also

$$\frac{1}{u(t)} = \frac{1}{u_0} - (t - t_0)$$

und somit die aus (2.24) bekannte Lösung von (3.5)

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - (t - t_0)} \text{ für } u_0 \neq 0.$$

Beispiel 3.7 (Radioaktiver Zerfall). Betrachte die Anfangswertaufgabe aus den Beispielen 1.1, 1.3 und 2.2 (vgl. (1.5))

$$u'(t) = -ku(t), \quad (3.6a)$$

$$u(t_0) = u_0 > 0. \quad (3.6b)$$

Hier ist $g(t) = -k$ und $h(v) = v$. Dies eingesetzt in (3.4) liefert für $u_0 > 0$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{u(t)}{u_0} \right) &= \ln \left(\frac{|u(t)|}{|u_0|} \right) = \ln |u(t)| - \ln |u_0| = [\ln |v|]_{v=u_0}^{u(t)} \\ &= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v} dv \stackrel{(3.4)}{=} \int_{t_0}^t -k ds = [-ks]_{s=t_0}^t = -k(t - t_0), \end{aligned}$$

also

$$\frac{u(t)}{u_0} = e^{-k(t-t_0)}$$

und somit die aus (1.6) bekannte Lösung von (3.6)

$$u(t) = u_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Im Fall $u_0 = 0$ (also $h(u_0) = 0$) erhalten wir die Lösung $u(t) = u_0$ von (3.6).

Nachdem wir in den Beispielen 3.6 und 3.7 gesehen haben, dass die Methode funktioniert, formulieren und beweisen wir das folgende Resultat.

Satz 3.8 (Trennung der Veränderlichen). Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $Q \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times Q$, $g \in C(J, \mathbb{R})$ und $h \in C(Q, \mathbb{R})$.

- (1) Ist $h(u_0) = 0$, so ist $u(t) = u_0$ für $t \in J$ eine globale Lösung von (3.3).
- (2) Ist $h(u_0) \neq 0$, so existiert ein echtes Intervall $K \subset J$ mit $t_0 \in K$, in dem (3.3) genau eine Lösung besitzt. Die Lösung erhält man durch Auflösen von (3.4) nach $u(t)$.

Beweis. (1) Sei $h(u_0) = 0$, dann gilt $f(t, u_0) = g(t)h(u_0) = 0$ für alle $t \in J$. Somit löst die Funktion $u(t) := u_0$, $t \in J$, die Anfangswertaufgabe (3.3)

$$\begin{aligned} u'(t) &= 0 = g(t)h(u_0) = g(t)h(u(t)) = f(t, u(t)), \quad t \in J, \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

- (2) Sei $h(u_0) \neq 0$, dann gibt es wegen $h \in C(Q, \mathbb{R})$ ein Intervall $V \subseteq Q$ mit

$$u_0 \in V \quad \text{und} \quad h(v) \neq 0 \quad \forall v \in V. \quad (3.7)$$

Damit ist die Funktion

$$H : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) := \int_{u_0}^x \frac{1}{h(v)} dv$$

stetig differenzierbar in V (mit $H'(x) = \frac{1}{h(x)}$) und streng monoton (denn wegen (3.7) gilt $H'(x) = \frac{1}{h(x)} > 0$ oder $H'(x) = \frac{1}{h(x)} < 0$ für alle $x \in V$). Nach dem Satz über die Umkehrabbildung ist $H : V \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und die Umkehrfunktion

$$H^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad W := H(V)$$

ist stetig differenzierbar in W und streng monoton. Insbesondere ist $W = H(V)$ ein offenes Intervall mit $0 = H(u_0) \in W$.

Sei nun $K \subseteq J$ ein echtes Intervall mit $t_0 \in K$ und der Eigenschaft

$$G(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds \in W \quad \forall t \in K.$$

Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$u : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t) := (H^{-1} \circ G)(t) = H^{-1}(G(t)) \quad (3.8)$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe (3.3) ist und (3.4) erfüllt. Wegen $G \in C^1(K, W)$ und $H^{-1} \in C^1(W, \mathbb{R})$ gilt nach der Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen $u \in C^1(K, \mathbb{R})$. Außerdem erfüllt u die Anfangsbedingung (3.3b), denn

$$u(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = u_0.$$

Aus (3.8) und der Umkehrbarkeit von H^{-1} folgt, dass u die Gleichung (3.4) löst:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)} dv = H(u(t)) = G(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds, \quad t \in K. \quad (3.9)$$

Letztlich folgt aus der Differentiation von (3.9) bzgl. t , dass u die Differentialgleichung (3.3a) löst, denn aus

$$g(t) = \frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}H(u(t)) = H'(u(t))u'(t) = \frac{u'(t)}{h(u(t))}, \quad t \in K$$

folgt durch Multiplikation mit $h(u(t))$

$$u'(t) = g(t)h(u(t)), \quad t \in K.$$

Somit löst $u \in C^1(K, \mathbb{R})$ die Anfangswertaufgabe (3.3) und erfüllt (3.4). \square

Bemerkung 3.9. Man kann zeigen, dass die so konstruierte Lösung in der Tat eindeutig ist, obwohl keine Lipschitz-Bedingung für h vorausgesetzt wird.

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Berechnung von Integralen ist die sogenannte Methode der **Partialbruchzerlegung**. Diese wird im folgenden Beispiel behandelt.

Beispiel 3.10 (Populationsmodell). Betrachte das zur logistischen Differentialgleichung aus Beispiel 3.5 (mit $k = M = 1$) gehörende Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t)(1 - u(t)), \quad (3.10a)$$

$$u(t_0) = u_0 \notin \{0, 1\}. \quad (3.10b)$$

Hier ist $g(t) = 1$ und $h(v) = v(1 - v)$. Dies eingesetzt in (3.4) liefert zunächst

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v(1-v)} dv = \int_{t_0}^t ds. \quad (3.11)$$

Das Problem hierbei besteht darin, eine Stammfunktion für den Integranden $\frac{1}{v(1-v)}$ zu finden. Hierzu verwenden wir die Methode der **Partialbruchzerlegung** mit dem Ansatz

$$\frac{1}{v(1-v)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1-v},$$

wobei $0 \neq A, B \in \mathbb{R}$ geeignet zu bestimmen sind. Multiplikation mit $v(1-v)$ liefert

$$1 = A(1-v) + bv = 1 \cdot A + v(B-A)$$

und mittels Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot A, \\ 0 &= B - A. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $A = 1$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir $B = 1$. Daraus folgt

$$\frac{1}{v(1-v)} = \frac{1}{v} + \frac{1}{1-v}$$

und dies eingesetzt in (3.11) liefert insgesamt

$$\begin{aligned} t - t_0 &= [s]_{s=t_0}^t = \int_{t_0}^t ds \stackrel{(3.11)}{=} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v(1-v)} dv = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v} dv + \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{1-v} dv \\ &= [\ln |v| - \ln |1-v|]_{v=u_0}^{u(t)} = \left[\ln \frac{|v|}{|1-v|} \right]_{v=u_0}^{u(t)} = \ln \frac{|u(t)|}{|1-u(t)|} - \ln \frac{|u_0|}{|1-u_0|} \\ &= \ln \frac{|u(t)||1-u_0|}{|u_0||1-u(t)|} = \ln \frac{u(t)(1-u_0)}{u_0(1-u(t))}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{u(t)(1-u_0)}{u_0(1-u(t))} = e^{t-t_0}$$

und somit

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = \frac{u_0}{1-u_0} e^{t-t_0}.$$

Dieser Ausdruck kann jetzt nach $u(t)$ aufgelöst werden. Setzen wir $W := \frac{u_0}{1-u_0} e^{t-t_0}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{1-u(t)} = W &\Rightarrow u(t) = (1-u(t))W \\ &\Rightarrow u(t)(1+W) = u(t) + u(t)W = W \\ &\Rightarrow u(t) = \frac{W}{1+W} \end{aligned}$$

und somit enden wir mit

$$u(t) = \frac{\frac{u_0}{1-u_0} e^{t-t_0}}{1 + \frac{u_0}{1-u_0} e^{t-t_0}} = \frac{u_0 e^{t-t_0}}{1 - u_0 + u_0 e^{t-t_0}} = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-(t-t_0)}}. \quad (3.12)$$

Entsprechend den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1 gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$, falls $u_0 > 0$ erfüllt ist.

3.3 Skalare lineare Differentialgleichungen

Wir wollen jetzt eine Formel für die Lösung skalarer linearer Differentialgleichungen herleiten, bei denen die Nichtlinearität f von der Form $f(t, v) = a(t)v + r(t)$ ist.

Dazu betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = a(t)u(t) + r(t), \quad (3.13a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.13b)$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}$ und $a, r \in C(J, \mathbb{R})$ seien.

Wir nennen die Differentialgleichung (3.13a) **homogen**, falls $r = 0$ ist, und andernfalls **inhomogen**. Analog bezeichnen wir die Anfangsdaten (3.13b) **homogen**, falls $u_0 = 0$ ist, und andernfalls **inhomogen**.

Herleitung der Variation der Konstanten Formel:

- a) Wir lösen zunächst die **homogene** Gleichung (mit **inhomogenen** Anfangsdaten)

$$u'(t) = a(t)u(t), \quad (3.14a)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (3.14b)$$

Mittels der **Trennung der Veränderlichen Formel** (3.4) aus Abschnitt 3.2 erhalten wir

$$\ln \left(\frac{u(t)}{u_0} \right) = \ln \left(\frac{|u(t)|}{|u_0|} \right) = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v} dv = \int_{t_0}^t a(s) ds =: \alpha(t), \quad t \in J,$$

also

$$\frac{u(t)}{u_0} = e^{\alpha(t)}, \quad t \in J$$

und somit

$$u(t) = u_0 e^{\alpha(t)} = u_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = u_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right), \quad t \in J. \quad (3.15)$$

Man beachte, dass der Betrag im Argument von \ln entfällt, da nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard Lindelöf für $t \in J$ eine der Bedingungen $u(t), u_0 > 0$, $u(t), u_0 < 0$ oder $u(t) = 0 = u_0$ gilt, d. h. $u(t)$ und u_0 haben dasselbe Vorzeichen. Wir überprüfen die Lösung mittels Probe

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} u(t) = \frac{d}{dt} \left[u_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) \right] \\ &= u_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t a(s) ds \right] = a(t)u(t), \\ u(t_0) &= u_0 \exp \left(\int_{t_0}^{t_0} a(s) ds \right) = u_0 \exp(0) = u_0. \end{aligned}$$

Diese Probe bestätigt, dass die Funktion u aus (3.15) die Anfangswertaufgabe (3.14) löst. Man beachte, dass auch die triviale Lösung $u(t) = 0$ für $t \in J$ zugelassen ist.

- b) Als nächstes lösen wir die **inhomogene** Gleichung (mit **homogenen** Anfangsdaten)

$$u'(t) = a(t)u(t) + r(t), \quad (3.16a)$$

$$u(t_0) = 0. \quad (3.16b)$$

Hierzu verwenden wir die Methode der **Variation der Konstanten** mit dem Produktansatz

$$u(t) = c(t)v(t), \quad t \in J, \quad (3.17)$$

wobei c noch geeignet zu bestimmen ist und $v(t) := e^{\alpha(t)}$ eine Lösung der homogenen Gleichung (3.14) bezeichnet. Einsetzen von (3.17) in (3.16a) liefert (wegen $v'(t) = a(t)v(t)$)

$$\begin{aligned} c'(t)v(t) + a(t)c(t)v(t) &= c'(t)v(t) + c(t)v'(t) = u'(t) = a(t)u(t) + r(t) \\ &= a(t)c(t)v(t) + r(t), \quad t \in J, \end{aligned}$$

also

$$c'(t)v(t) = r(t), \quad t \in J$$

und somit

$$c'(t) = \frac{r(t)}{v(t)} = e^{-\alpha(t)}r(t), \quad t \in J. \quad (3.18)$$

Setzen wir (3.17) in (3.16b) ein, so erhalten wir (wegen $v(t_0) = 1$, da $\alpha(t_0) = 0$)

$$0 = u(t_0) = c(t_0)v(t_0) = c(t_0)$$

und daher liefert die Integration von (3.18) von t_0 bis t

$$c(t) = c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^t c'(s)ds = \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s)}r(s)ds, \quad t \in J.$$

Setzen wir dies nun in (3.17) ein, so erhalten wir die Lösung von (3.16) durch

$$u(t) = c(t)v(t) = e^{\alpha(t)} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s)}r(s)ds, \quad t \in J. \quad (3.19)$$

- c) Zuletzt lösen wir die **inhomogene** Gleichung (mit **inhomogenen** Anfangsdaten) (3.13). Die Lösung von (3.13) erhalten wir, indem wir die Lösung (3.15) von (3.14) und die Lösung (3.19) von (3.16) miteinander addieren

$$u(t) = u_0 e^{\alpha(t)} + e^{\alpha(t)} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s)}r(s)ds = e^{\alpha(t)} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(s)}r(s)ds \right), \quad t \in J, \quad (3.20)$$

wobei $\alpha(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds$. Die Formel (3.20) wird als **Variation der Konstanten Formel** bezeichnet. Man beachte, dass sich die Lösung von (3.13) als Summe bestehend aus der Lösung der homogenen Gleichung mit inhomogenen Anfangsdaten und der Lösung der inhomogenen Gleichung mit homogenen Anfangsdaten schreiben lässt.

Wir notieren die folgende Lösungsformel für die eindeutig lösbare Anfangswertaufgabe (3.13):

Variation der Konstanten Formel:

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} r(s) ds \right), \quad t \in J. \quad (3.21)$$

Außerdem halten wir das folgende Resultat für homogene lineare Differentialgleichungen fest.

Satz 3.11 (Homogene lineare Differentialgleichung). *Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}$ und $a \in C(J, \mathbb{R})$. Dann sind alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung*

$$u'(t) = a(t)u(t), \quad t \in J \quad (3.22)$$

von der Form

$$u(t) = Ce^{\alpha(t)}, \quad t \in J$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $u \in C^1(J, \mathbb{R})$ eine beliebige Lösung von (3.22). Dann erfüllt die Funktion

$$h : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := u(t)e^{-\alpha(t)}$$

wegen $u'(t) = a(t)u(t)$ die Gleichung

$$h'(t) = u'(t)e^{-\alpha(t)} - \alpha'(t)u(t)e^{-\alpha(t)} = (u'(t) - a(t)u(t))e^{-\alpha(t)} = 0, \quad t \in J.$$

Folglich ist h konstant, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$C = h(t) = u(t)e^{-\alpha(t)}, \quad t \in J$$

und folglich

$$u(t) = Ce^{\alpha(t)}, \quad t \in J.$$

□

Beispiel 3.12. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -3u(t) + t, \quad (3.23a)$$

$$u(0) = \frac{8}{9}, \quad (3.23b)$$

mit $a(t) = -3$, $r(t) = t$, $t_0 = 0$ und $u_0 = \frac{8}{9}$. Die Lösung von (3.23) erhalten wir aus der Variation der Konstanten Formel (3.21). Wegen

$$\alpha(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau = \int_0^t -3d\tau = -3t, \quad t \in J$$

erhalten wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\alpha(s)} r(s) ds &= \int_0^t e^{3s} s ds = \left[\frac{1}{3} e^{3s} s \right]_{s=0}^t - \int_0^t \frac{1}{3} e^{3s} ds = \left[\frac{1}{3} e^{3s} s - \frac{1}{9} e^{3s} \right]_{s=0}^t \\ &= \frac{1}{3} e^{3t} t - \frac{1}{9} e^{3t} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Somit liefert (3.21) die Lösung von (3.23) durch

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\alpha(t)} \left(\frac{8}{9} + \int_0^t e^{-\alpha(s)} r(s) ds \right) = e^{-3t} \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{3} e^{3t} t - \frac{1}{9} e^{3t} + \frac{1}{9} \right) \\ &= e^{-3t} + \frac{1}{3} t - \frac{1}{9}, \quad t \in J. \end{aligned}$$

3.4 Das Newtonsche Gesetz der Abkühlung

Beispiel 3.13 (Abkühlung eines Körpers). Betrachte die skalare lineare Differentialgleichung

$$u'(t) = -k(u(t) - A(t)), \quad t \in J. \quad (3.24)$$

Die Differentialgleichung (3.24) modelliert die Abkühlung eines Körpers. Hierbei bezeichnen

$u(t)$: die Körpertemperatur zur Zeit t (in $^{\circ}C$),

$A(t)$: die Außentemperatur zur Zeit t (in $^{\circ}C$),

k : die Rate, mit der der Körper Wärme absorbiert oder emittiert,

wobei $A \in C(J, \mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 0$.

- a) Lösung der Anfangswertaufgabe: Betrachte die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -k(u(t) - A(t)), \quad (3.25a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.25b)$$

mit $a(t) = -k$, $r(t) = kA(t)$, $t_0 \in J$ und $u_0 \in \mathbb{R}$. Die Lösung von (3.25) erhalten wir aus der Variation der Konstanten Formel (3.21). Wegen

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t -k d\tau = -k(t - t_0), \quad t \in J$$

erhalten wir aus (3.21)

$$u(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} kA(s) ds \right), \quad t \in J.$$

- b) Anwendung: Um 9 : 00 Uhr wird eine Leiche gefunden, deren Körpertemperatur noch 13°C beträgt. Die Außentemperatur liegt seit Stunden konstant bei 5°C . Um 10 : 00 Uhr ist die Körpertemperatur auf 9°C abgesunken. Wann war der Todeszeitpunkt?

Zunächst besitzt die Anfangswertaufgabe (3.25) wegen der konstanten Außentemperatur $A(t) = A$ die Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-k(t-t_0)} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} k A ds \right) \\ &= e^{-k(t-t_0)} \left(u_0 + A \left[e^{k(s-t_0)} \right]_{s=t_0}^t \right) \\ &= e^{-k(t-t_0)} (u_0 + A e^{k(t-t_0)} - A) \\ &= e^{-k(t-t_0)} (u_0 - A) + A, \quad t \in J. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nun benutzen wir die Messwerte von 9 : 00 und 10 : 00 Uhr zum Schätzen der Konstanten k : Einsetzen von

$$A = 5, \quad t_0 = 9, \quad u_0 = 13, \quad t = 10 \quad (\text{da } u(10) = 9)$$

in (3.26) liefert

$$9 = u(10) = e^{-k(10-9)}(13 - 5) + 5 = 8e^{-k} + 5$$

also

$$e^{-k} = \frac{1}{8}(9 - 5) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad k = \ln 2.$$

Schließlich müssen wir den Todeszeitpunkt t_L bestimmen: Wir nehmen an, dass die Lebendtemperatur des Körpers $u_L = 37^\circ\text{C}$ betrug. Einsetzen von

$$A = 5, \quad t_0 = t_L, \quad u_0 = u_L = 37, \quad k = \ln 2$$

in (3.26) liefert

$$u(t) = e^{-\ln 2 \cdot (t-t_L)}(37 - 5) + 5 = 32e^{-\ln 2 \cdot (t-t_L)} + 5, \quad t \in J.$$

Die entstehende Gleichung

$$13 = u(9) = 32e^{-\ln 2 \cdot (9-t_L)} + 5$$

müssen wir nun noch nach t_L auflösen. Es gilt

$$e^{-\ln 2 \cdot (9-t_L)} = \frac{1}{32}(13 - 5) = \frac{1}{4}$$

also (wegen $\ln x^r = r \ln x$)

$$-\ln 2 \cdot (9 - t_L) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$$

und somit (erneut wegen $\ln x^r = r \ln x$)

$$t_L = 9 - \frac{\ln 4}{\ln 2} = 9 - \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 9 - 2 = 7.$$

Folglich war der Todeszeitpunkt um 7 : 00 Uhr.

3.5 Transformation von Differentialgleichungen

Betrachte die Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (3.27)$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Transformation von Differentialgleichungen: (Grundidee). Gegeben sei eine bijektive Abbildung

$$T : \Omega \rightarrow \Gamma, \quad (t, u) \mapsto T(t, u), \quad \Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen.}$$

Die Einführung neuer Koordinaten

$$(s, v) = T(t, u) \quad (3.28)$$

liefert eine transformierte Differentialgleichung der Form

$$v'(s) = g(s, v(s)). \quad (3.29)$$

Hierbei ergibt sich die neue Funktion v in (3.29) aus der Bedingung

$$T(t, u(t)) = (s, v(s)), \quad (t, u(t)) \in \Omega.$$

Die Funktion T bezeichnen wir als **Transformationsabbildung** (oder kurz: **Transformation**). Die Transformation einer Differentialgleichung kann verschiedene Vorteile haben:

- (1) (3.29) ist einfacher zu lösen als (3.27),
- (2) (3.29) enthält weniger Parameter als (3.27),
- (3) (3.29) enthält *entdimensionalisierte Größen* (in physikalischen, chemischen oder ökologischen Systemen).

Beispiel 3.14 (Populationsmodell). Betrachte erneut das zur logistischen Differentialgleichung aus den Beispielen 3.5, 3.10 (mit $M = 1$) gehörende Anfangswertproblem

$$u'(t) = ku(t)(1 - u(t)), \quad (3.30a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.30b)$$

für $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}$ mit $u_0 \notin \{0, 1\}$. Die Transformation

$$T : \Omega \rightarrow \Gamma, \quad T(t, u) := (kt, u), \quad \Omega = \Gamma = \mathbb{R}^2 \quad (\text{Skalierung der Zeit}) \quad (3.31)$$

liefert die neuen Koordinaten $(s, v(s)) = T(t, u(t)) = (kt, u(t))$, d. h.

$$s = kt, \quad v(s) = u(t) = u\left(\frac{s}{k}\right).$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds} \left[u\left(\frac{s}{k}\right) \right] = \frac{1}{k}u'\left(\frac{s}{k}\right) = \frac{1}{k}ku\left(\frac{s}{k}\right) \left(1 - u\left(\frac{s}{k}\right)\right) \\ &= u\left(\frac{s}{k}\right) \left(1 - u\left(\frac{s}{k}\right)\right) = v(s)(1 - v(s)), \\ v(kt_0) &= u(t_0) = u_0, \end{aligned}$$

und somit die transformierte Differentialgleichung

$$v'(s) = v(s)(1 - v(s)), \quad (3.32a)$$

$$v(s_0) = v_0, \quad (3.32b)$$

wobei $s_0 := kt_0$ und $v_0 := u_0$. Daher gilt (3.29) mit $g(s, v) := v(1 - v)$. Im Vergleich zu (3.30) kommt der Parameter k in (3.32) nun in der Differentialgleichung nicht mehr vor, sehr wohl aber noch in der Anfangsbedingung (insofern $t_0 \neq 0$). Die Lösung von (3.32) ist nach (3.12) gegeben durch

$$v(s) = \frac{u_0}{u_0 + (1 - u_0)e^{-(s-s_0)}} \quad \text{für} \quad \begin{cases} s \in \mathbb{R} & , 0 \leq u_0 \leq 1, \\ -\infty < s < s_+ := s_0 + \ln\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right) & , u_0 < 0. \\ s_- := s_0 - \ln\left(\frac{u_0}{u_0-1}\right) \leq s < \infty & , u_0 > 1. \end{cases}$$

Nach Rücktransformation

$$t = \frac{s}{k}, \quad u(t) = v(s) = v(kt), \quad t_0 = \frac{s_0}{k}$$

erhalten wir die Lösung von (3.30)

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1 - u_0)e^{-k(t-t_0)}} \quad \text{für} \quad \begin{cases} t \in \mathbb{R} & , 0 \leq u_0 \leq 1, \\ -\infty < t < t_+ := t_0 + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right) & , u_0 < 0. \\ t_- := t_0 - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_0}{u_0-1}\right) \leq t < \infty & , u_0 > 1. \end{cases}$$

Es ist (zumindest für Anfänger) **extrem wichtig** den **neuen Variablen** grundsätzlich **neue Namen** zu geben, um Fehler zu vermeiden. Im obigen Zusammenhang lauten die neuen Variablen s, v, s_0, v_0 und die alten Variablen t, u, t_0, u_0 . In der Literatur wird das Einführen neuer Bezeichnungen häufig vermieden, d. h. nach erfolgreicher Transformation werden die Variablen s, v, s_0, v_0 in (3.32) schlichtweg durch t, u, t_0, u_0 ersetzt. Dies führt auf das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t)(1 - u(t)), \quad (3.33a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.33b)$$

was bis auf die Bezeichnungen der Variablen mit (3.32) übereinstimmt. Ein Vergleich von (3.33) mit (3.30) kann nun zu erheblichen Verwirrungen führen!

Beispiel 3.15 (Populationsmodell). Betrachte erneut das zur logistischen Differentialgleichung aus den Beispielen 3.5, 3.10 und 3.14 bekannte Anfangswertproblem

$$u'(t) = ku(t) \left(1 - \frac{u(t)}{M}\right), \quad (3.34a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.34b)$$

wobei $k, M \in \mathbb{R}$, $k, M > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$ und $u_0 \notin \{0, M\}$. Die Transformation

$$T : \Omega \rightarrow \Gamma, \quad T(t, u) := (t, bu), \quad \Omega = \Gamma = \mathbb{R}^2 \quad (3.35)$$

für ein (noch unbekanntes) $b \neq 0$, liefert die neuen Koordinaten $(s, v(s)) = T(t, u(t)) = (t, bu(t))$, d. h.

$$s = t, \quad v(s) = bu(t) = bu(s).$$

Daraus erhalten wir

$$v'(s) = \frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds}[bu(s)] = bu'(s) = bku(s) \left(1 - \frac{u(s)}{M}\right) = kv(s) \left(1 - \frac{v(s)}{bM}\right),$$

$$v(t_0) = bu(t_0) = bu_0.$$

Für $b = \frac{1}{M}$ erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$v'(s) = kv(s)(1 - v(s)), \quad (3.36a)$$

$$v(s_0) = v_0, \quad (3.36b)$$

wobei $s_0 := t_0$ und $v_0 := \frac{u_0}{M}$. Somit liegt der einfache Fall (3.30) vor und die Lösung lautet

$$v(s) = \frac{v_0}{v_0 + (1 - v_0)e^{-k(s-s_0)}}.$$

Nach Rücktransformation

$$t = s, \quad u(t) = \frac{1}{b}v(s) = Mv(t), \quad t_0 = s_0$$

erhalten wir die Lösung von (3.34)

$$\begin{aligned} u(t) = Mv(t) &= M \frac{v_0}{v_0 + (1 - v_0)e^{-k(t-s_0)}} = M \frac{\frac{u_0}{M}}{\frac{u_0}{M} + \left(1 - \frac{u_0}{M}\right) e^{-k(t-t_0)}} \\ &= \frac{Mu_0}{u_0 + (M - u_0)e^{-k(t-t_0)}}. \end{aligned}$$

Durch unsere Transformationen in den Beispielen 3.14 und 3.15 konnten wir beide Parameter k und M der Differentialgleichung in (3.34) eliminieren und die Differentialgleichung auf einen ganz einfachen Fall (eine sogenannte **Normalform**) reduzieren, vgl. (3.32).

Beispiel 3.16 (Eine lineare Gleichung). Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u(t) + t - 1, \quad (3.37a)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (3.37b)$$

Die Transformation

$$T : \Omega \rightarrow \Gamma, \quad T(t, u) := (t, u + t), \quad \Omega = \Gamma = \mathbb{R}^2 \quad (3.38)$$

liefert die neuen Koordinaten $(s, v(s)) = T(t, u(t)) = (t, u(t) + t)$, d. h.

$$s = t, \quad v(s) = u(t) + t = u(s) + s.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds}[u(s) + s] = u'(s) + 1 = u(s) + s - 1 + 1 = u(s) + s = v(s), \\ v(t_0) &= u(t_0) + t_0 = u_0 + t_0, \end{aligned}$$

und somit die transformierte Differentialgleichung

$$v'(s) = v(s), \tag{3.39a}$$

$$u(s_0) = v_0, \tag{3.39b}$$

wobei $s_0 = t_0$ und $v_0 := u_0 + t_0$. Damit besitzt (3.39) die Lösung

$$v(s) = v_0 e^{s-s_0}.$$

Nach Rücktransformation

$$t = s, \quad u(t) = v(s) - t = v(t) - t, \quad t_0 = s_0$$

erhalten wir die Lösung von (3.37)

$$u(t) = v(t) - t = v_0 e^{t-s_0} - t = (u_0 + t_0) e^{t-t_0} - t.$$

Beispiel 3.17 (Populationsdynamik). Betrachte die aus dem Beispielen 1.5 bekannten **Lotka-Volterra-Gleichungen** (oder: **Räuber-Beute-Gleichungen**)

$$u_1'(t) = k_1 u_1(t) \cdot \left(1 - \frac{r_1}{k_1} u_2(t)\right), \tag{3.40a}$$

$$u_2'(t) = k_2 u_2(t) \cdot \left(-1 + \frac{r_2}{k_2} u_1(t)\right), \tag{3.40b}$$

wobei $k_1, k_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $k_1, k_2, r_1, r_2 > 0$. Die Transformation

$$T : \Omega \rightarrow \Gamma, \quad T(t, (u_1, u_2)) := (t, au_1, bu_2), \quad \Omega = \Gamma = \mathbb{R}^3 \tag{3.41}$$

für (noch unbekannte) $a, b \neq 0$, liefert die neuen Koordinaten $(s, v_1(s), v_2(s)) = T(t, (u_1(t), u_2(t))) = (t, au_1(t), bu_2(t))$, d. h.

$$s = t, \quad v_1(s) = au_1(t) = au_1(s), \quad v_2(s) = bu_2(t) = bu_2(s).$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} v_1'(s) &= \frac{d}{ds}v_1(s) = \frac{d}{ds}[au_1(s)] = au_1'(s) = ak_1 u_1(s) \left(1 - \frac{r_1}{k_1} u_2(s)\right) \\ &= k_1 v_1(s) \left(1 - \frac{r_1}{k_1 b} v_2(s)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2'(s) &= \frac{d}{ds} v_2(s) = \frac{d}{ds} [bu_2(s)] = bu_2'(s) = bk_2 u_2(s) \left(-1 + \frac{r_2}{k_2} u_1(s) \right) \\ &= k_2 v_2(s) \left(-1 + \frac{r_2}{k_2 a} v_1(s) \right). \end{aligned}$$

Für $a = \frac{r_2}{k_2}$ und $b = \frac{r_1}{k_1}$ erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$v_1'(s) = k_1 v_1 (1 - v_2(s)), \quad (3.42a)$$

$$v_2'(s) = k_2 v_2 (-1 + v_1(s)), \quad (3.42b)$$

mit zwei anstelle von vier Parametern. Beachte: Durch zusätzliche Zeitskalierung in (3.41), können wir noch einen weiteren Parameter eliminieren, so dass die transformierte Gleichung lediglich von einem Parameter abhängig ist.

Transformation von Differentialgleichungen: (Das allgemeine Prinzip).

Betrachte erneut die Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (3.43)$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ seien. Gegeben sei wieder eine bijektive Abbildung

$$T : \Omega \rightarrow \Gamma, \quad (t, u) \mapsto T(t, u), \quad \Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen.}$$

Diese Transformation liefert die neuen Koordinaten

$$(s, v(s)) = T(t, u(t)). \quad (3.44)$$

Zur Herleitung der transformierten Differentialgleichung (3.29) ist es oftmals einfacher anstelle von (3.44) mit der inverse Transformation zu arbeiten

$$(t, u(t)) = T^{-1}(s, v(s)) =: \Phi(s, v(s)), \quad \Phi := T^{-1}. \quad (3.45)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $\Omega = \Gamma = \mathbb{R}^{n+1}$ gilt und $\Phi : \Gamma \rightarrow \Omega$ von der Form

$$\Phi(s, v) = (\Phi_1(s), \Phi_2(s, v)) \quad (3.46)$$

ist, wobei $\Phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Phi_2(s, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und bijektiv mit stetig differenzierbaren Inversen seien. (3.45) und (3.46) liefert

$$(t, u(t)) = (\Phi_1(s), \Phi_2(s, v(s)))$$

und daher

$$t = \Phi_1(s), \quad u(\Phi_1(s)) = u(t) = \Phi_2(s, v(s)).$$

Daraus erhalten wir durch Differentiation bzgl. s

$$\partial_s \Phi_2(s, v(s)) + \partial_v \Phi_2(s, v(s)) v'(s) = \frac{d}{ds} [\Phi_2(s, v(s))] = \frac{d}{ds} [u(\Phi_1(s))]$$

$$= u'(\Phi_1(s))\Phi_1'(s) = f(\Phi_1(s), u(\Phi_1(s)))\Phi_1'(s) = f(\Phi_1(s), \Phi_2(s, v(s)))\Phi_1'(s).$$

Da $\partial_v \Phi_2(s, v(s)) \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar ist, erhalten wir schließlich

$$v'(s) = (\partial_v \Phi_2(s, v(s)))^{-1} (f(\Phi_1(s), \Phi_2(s, v(s)))\Phi_1'(s) - \partial_s \Phi_2(s, v(s))) \quad (3.47)$$

und somit die transformierte Differentialgleichung (3.29) mit

$$g(s, v) := (\partial_v \Phi_2(s, v))^{-1} (f(\Phi_1(s), \Phi_2(s, v))\Phi_1'(s) - \partial_s \Phi_2(s, v)).$$

Beachte: Ist u eine Lösung der Differentialgleichung (3.43) und v durch die Beziehung (3.45) gegeben, so ist v eine Lösung der transformierten Differentialgleichung (3.47). Ist umgekehrt v eine Lösung der transformierten Differentialgleichung (3.47) und u durch die Beziehung (3.45) gegeben, so ist u eine Lösung der Differentialgleichung (3.43).

4 Numerische Lösung gewöhnlicher Anfangswertaufgaben

4.1 Einschrittverfahren

Da es häufig schwer bzw. unmöglich ist, eine Differentialgleichung analytisch zu lösen, werden in den folgenden Abschnitten einige numerische Verfahren (aus der Klasse der **Einschrittverfahren**) zur Lösung von Anfangswertaufgaben eingeführt.

Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), t \in J, \quad (4.1a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (4.1b)$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ und $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ seien.

Idee numerischer Verfahren: Grundsätzlich besteht die Idee numerischer Verfahren **nicht** darin, eine explizit auswertbare Funktion u zu konstruieren, die die Anfangswertaufgabe (4.1) löst (wie beispielsweise bei der Picard-Iteration (2.11) in Satz 2.11), sondern die Idee besteht darin, die Funktionswerte $u(t)$ auf einem Gitter $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \subset J$ zu approximieren (d. h. anzunähern), wobei $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ gelte. Wir suchen also Approximationen $u_j \in \mathbb{R}^n$ der Funktionswerte $u(t_j)$ für $j = 1, 2, \dots, N$.

Der Gitterabstand wird hierbei häufig **äquidistant** gewählt, d. h. es gilt

$$t_{j+1} - t_j = h \quad \forall j = 0, 1, \dots, N-1$$

für ein $h > 0$. In diesem Fall gilt $t_j = t_0 + jh$ und demnach ist u_j eine Approximation von $u(t_0 + jh)$. Hierbei nennt man $h > 0$ die **Schrittweite** des Einschrittverfahrens und die Punkte t_j die **Stützstellen**. Ist der Gitterabstand **nicht-äquidistant**, so fasst man h häufig als Vektor $h = (h_0, \dots, h_{N-1})$ auf und es gilt

$$t_{j+1} - t_j = h_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Idee der Einschrittverfahren: Bei einem sogenannten **Einschrittverfahren** wird eine Approximation der Lösung u von (4.1) wie folgt berechnet, wobei wir uns hier auf den Fall eines äquidistanten Gitters beziehen. Der Anfangswert $u(t_0) = u_0$ ist durch (4.1b) gegeben. Auf Basis dieses Startwertes liefert das Einschrittverfahren dann die Approximation u_1 von $u(t_1) = u(t_0 + h)$, d.h.

$$u_0 \rightarrow \boxed{\text{Einschrittverfahren}} \rightarrow u_1.$$

Diese Rechnung wird iteriert. Die Approximation u_2 von $u(t_2) = u(t_0 + 2h)$ erhält man mittels

$$u_1 \rightarrow \boxed{\text{Einschrittverfahren}} \rightarrow u_2$$

und im $(j + 1)$ -ten Rechenschritt, $j \in \{0, \dots, N - 1\}$, liefert

$$u_j \rightarrow \boxed{\text{Einschrittverfahren}} \rightarrow u_{j+1}$$

die Approximation u_{j+1} von $u(t_{j+1}) = u(t_0 + (j + 1)h)$. Hierbei sind die Stützstellen wie oben beschrieben durch $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, \dots, N$ gegeben. Die Vektoren $u_j \in \mathbb{R}^n$ sind also eine Approximation von $u(t_j)$, also der exakten Lösung u an der Stelle t_j . Zusammen bilden diese Vektoren, kurz (u_0, \dots, u_N) oder $(u_j)_{j=0, \dots, N}$, eine Approximation der Lösung u auf dem Gitter $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$.

Bislang bleibt jedoch unklar, wie wir mathematisch den Wert u_{j+1} aus dem Wert u_j erhalten. Daher können wir die obige Box des Einschrittverfahrens zunächst noch als *Black Box* ansehen. Wir untersuchen in den folgenden vier Abschnitten die Funktionsweise dieser *Black Box* für einige ausgewählte numerische Verfahren.

4.2 Das explizite Euler-Verfahren

Wir wollen jetzt das einfachste numerische Verfahren zum Lösen von Anfangswertaufgaben kennenlernen, das sogenannte (**explizite**) **Euler-Verfahren**.

Dazu betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), t \in J, \quad (4.2a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (4.2b)$$

wobei $J = [t_0, T]$ mit $T < \infty$ oder $J = [t_0, \infty)$.

Motivation des (expliziten) Euler-Verfahrens: Die Idee des Euler-Verfahrens besteht darin, die Lösung u der Anfangswertaufgabe (4.2) zu approximieren, indem man der Tangente ein kleines Stück folgt. Formal bedeutet dies

$$u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

für ein $h > 0$. Ein iteratives Wiederholen dieser Idee führt auf

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_0 + jh, u_j), j = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei wir $t_j := t_0 + jh$ setzten.

Wir können die Idee auch so interpretieren, dass wir ausgehend vom Anfangspunkt (t_0, u_0) dem Richtungsfeld linear folgen, bis wir t_1 erreichen

$$(t_1, u_1) = (t_0, u_0) + h(1, f(t_0, u_0)).$$

Anschließend folgen wir mit

$$(t_{j+1}, u_{j+1}) = (t_j, u_j) + h(1, f(t_j, u_j)), j = 1, 2, \dots$$

dem jeweils vorgefundenen Richtungsfeld. Im Falle, dass die Stützstellen nicht äquidistant sind, müssen wir $t_{j+1} - t_j$ anstelle von h verwenden und erhalten

$$u_{j+1} = u_j + (t_{j+1} - t_j)f(t_j, u_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Herleitung des (expliziten) Euler-Verfahrens: Wir wählen eine zeitliche **Schrittweite** $h > 0$ und definieren ein (**äquidistantes**) **Gitter**

$$J_h := \mathbb{R}_h \cap J, \quad \mathbb{R}_h := \{t_j := t_0 + jh \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

mit zugehöriger Indexmenge

$$I_h := \{j \in \mathbb{Z} \mid t_j \in J_h\}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} I_h &= \{0, 1, \dots, N\}, & J_h &= \{t_0, t_1, \dots, t_N\}, & \text{falls } J &= [t_0, T], \\ I_h &= \mathbb{N}_0, & J_h &= \{t_0, t_1, \dots\}, & \text{falls } J &= [t_0, \infty). \end{aligned}$$

Sei u eine Lösung von (4.2). Zur Approximation (d. h. Annäherung) von $u(t_j)$, also der Lösung u an den Gitterpunkten t_j , ersetzen wir die Zeitableitung $u'(t_j)$ in (4.2a) durch den **vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten**

$$\frac{1}{h} (u(t_j + h) - u(t_j)),$$

der für $h \rightarrow 0$ gegen $u'(t_j)$ konvergiert. Dies liefert

$$\frac{1}{h} (u_{j+1} - u_j) = f(t_j, u_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, j \in I_h.$$

Die Werte $u_j \in \mathbb{R}^n$ stellen eine Approximation von $u(t_j)$ dar, d. h. $u_j \approx u(t_j)$. Zusammen mit den Anfangsdaten

$$u_0 = u(t_0)$$

erhalten wir unser erstes Verfahren:

Explizites Euler-Verfahren:

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

wobei $u_0 = u(t_0) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

(4.3) heißt (**explizites**) **Euler-Verfahren** (oder **Eulersches Polygonzugverfahren**, **Euler-Cauchy-Verfahren** oder **Euler-vorwärts-Verfahren**).

Die Euler-Iterierte u_{j+1} ist eine Approximation (d. h. Annäherung) der exakten Lösung u zur Zeit t_{j+1} , d. h. $u_{j+1} \approx u(t_{j+1})$. Je kleiner die Schrittweite $h > 0$ gewählt wird, desto mehr Stützstellen t_j liegen vor und desto rechenintensiver ist die Berechnung der Euler-Iterierten. Je kleiner $h > 0$ gewählt wird, desto genauer approximiert die Euler-Iterierte u_{j+1} den exakten Wert $u(t_{j+1})$. Diese Aussagen werden wir im verbleibenden Teil dieses Abschnittes noch präzisieren.

Im folgenden Beispiel wenden wir das Euler-Verfahren auf eine Anfangswertaufgabe an, deren Lösung uns explizit vorliegt.

Beispiel 4.1. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u(t), \quad t \in J, \quad (4.4a)$$

$$u(0) = 1. \quad (4.4b)$$

Hier ist $t_0 = 0$, $u_0 = 1$, $f(t, v) = v$ und $J := [0, \infty)$.

- a) Lösung der Anfangswertaufgabe: Nach der Trennung der Veränderlichen Formel (3.4) besitzt die Anfangswertaufgabe (4.4) die exakte Lösung

$$u(t) = e^t = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{j}\right)^j, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b) Berechnung der Euler-Iterierten: Wir verwenden das Euler-Verfahren zur Approximation der Lösung u . Wegen $f(t, v) = v$ und $u_0 = 1$ erhalten wir aus (4.3)

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + hf(t_0, u_0) = u_0 + hu_0 = (1+h)u_0 = (1+h), \\ u_2 &= u_1 + hf(t_1, u_1) = u_1 + hu_1 = (1+h)u_1 = (1+h)^2, \\ u_3 &= u_2 + hf(t_2, u_2) = u_2 + hu_2 = (1+h)u_2 = (1+h)^3. \end{aligned}$$

Dies führt uns zu der folgenden Induktionsbehauptung:

$$u_j = (1+h)^j, \quad j \in I_h = \mathbb{N}_0. \quad (4.5)$$

Der Beweis von (4.5) erfolgt durch vollständige Induktion über $j \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang ($j = 0$): Nach (4.4b) gilt

$$u_0 := u(0) = 1 = (1+h)^0.$$

Induktionsschritt ($j \rightarrow j+1$): Aus (4.3) und der Induktionsvoraussetzung (4.5) folgt

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j) = u_j + hu_j = (1+h)u_j = (1+h)^{j+1}.$$

- c) Konvergenz des Euler-Verfahrens: Die wesentliche Frage ist nun, wie gut $u(t_j) = u(hj) = e^{hj}$ durch u_j angenähert wird. Wir zeigen hierzu, dass die Lösung $u(t) = e^t$ (auf kompakten Intervallen!) für hinreichend kleines $h > 0$ beliebig genau mit dem Euler-Verfahren approximiert werden kann: Sei $T > 0$ ein fest gewählter Endzeitpunkt, $J := [0, T]$, N die Anzahl der Teilintervalle, in die J zerlegt wird und $h = h_N = \frac{T}{N}$ die äquidistante Schrittweite. Dann liefert das Euler-Verfahren die Approximation

$$u_N = (1+h)^N = \left(1 + \frac{T}{N}\right)^N \approx e^T = u(T).$$

Für $N \rightarrow \infty$ strebt $h = h_N = \frac{T}{N}$ gegen 0, d. h. das Intervall $[0, T]$ wird immer feiner unterteilt. Den Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{T}{N}\right)^N = e^T$ kennen wir aus der Analysis, d. h. der Funktionswert e^T wird durch den Wert des Euler-Verfahrens beliebig genau approximiert. Wie der Fehler genau von der Schrittweite h und dem Zeitpunkt T abhängt, werden wir später in Satz 4.3 abschätzen.

Das Euler-Verfahren kann natürlich auch auf Anfangswertaufgaben angewandt werden, deren Lösung analytisch nicht angegeben werden kann.

Beispiel 4.2. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = t - (u(t))^2, \quad t \in J, \quad (4.6a)$$

$$u(0) = 0. \quad (4.6b)$$

Hier ist $t_0 = 0$, $u_0 = 0$, $f(t, v) = t - v^2$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in J$. Das explizite Euler-Verfahren im Falle konstanter Schrittweiten $h > 0$, d. h. $t_j = t_0 + jh$, lautet

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j) = u_j + h(t_j - u_j^2), \quad j \in I_h.$$

Für $t_0 = 0$, $u_0 = 0$ und $h = 1$ erhalten wir $t_j = j$ und

$$u_0 = 0,$$

$$u_1 = u_0 + t_0 - u_0^2 = 0,$$

$$u_2 = u_1 + t_1 - u_1^2 = t_1 = 1.$$

Diese sehr große Schrittweite $h = 1$ führt nur zu einer sehr groben Approximation, die sich durch Verkleinerung der Schrittweite verbessern lässt. Numerische Experimente zeigen, dass das Euler-Verfahren zwar auf einem gewissen Intervall $[0, T_h]$ gute Approximationen liefert, dann aber stark zu oszillieren beginnt, während sich die Lösung u von (4.6) für große t -Werte wie \sqrt{t} verhält und nicht oszilliert.

Der folgende Satz liefert für allgemeine Anfangswertaufgaben der Form (4.2) eine Fehlerabschätzung für das explizite Euler-Verfahren. Um sicherzustellen, dass die Anfangswertaufgabe (4.2) (nach Satz 2.11) eine eindeutige globale Lösung besitzt, fordern wir, dass f (bezüglich der 2. Variablen) Lipschitz-beschränkt ist. Außerdem verlangen wir, dass die Funktion f sogar stetig differenzierbar ist.

Satz 4.3 (Konvergenzsatz für das explizite Eulerverfahren). Sei $0 < T < \infty$, $J = [0, T]$, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}^n$ (bezüglich der 2. Variablen) mit Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, d. h.

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L \|v - w\| \quad \forall t \in J \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n,$$

und sei $f \in C^1(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Weiter bezeichne $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ die nach Satz 2.11 eindeutige globale Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J, \quad (4.7a)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.7b)$$

und u_j die Approximation dieser Lösung mit dem explizite Euler-Verfahren an den Stellen $t_j = jh \in J_h$. Dann gilt

$$\exists C = C(T, u, L) > 0 : \|u(t_j) - u_j\| \leq Ch \quad \forall j \in I_h \quad (4.8)$$

wobei die Konstante C von der Intervalllänge T , der Lösung u und der Lipschitz-Konstanten L abhängt, nicht aber vom Index j und von der Schrittweite h .

Bemerkung 4.4. Ein Einschrittverfahren hat die **Konvergenzordnung** $p \in \mathbb{N}$, falls ein $C > 0$ und ein $\bar{h} > 0$ existieren mit $\|u(t_j) - u_j\| \leq Ch^p$ für alle $t_j \in J_h$ und alle $0 < h \leq \bar{h}$. Das Euler-Verfahren hat wegen (4.8) die Konvergenzordnung 1. Wir können (4.8) so interpretieren, dass sich bei einer Halbierung von h auch der Approximationsfehler halbiert (genau genommen gilt das nur für die Abschätzung des Fehlers). Bei einem Verfahren der Ordnung p wird der Fehler um den Faktor 2^p verringert. Solche Verfahren höherer Ordnung werden wir in den folgenden Abschnitten besprechen.

Beachte auch, dass aus der stetigen Differenzierbarkeit von f die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Lösung u folgt, d. h. es gilt sogar $u \in C^2(J, \mathbb{R}^n)$. Denn in der Differentialgleichung (4.7a) ist die rechte Seite noch stetig differenzierbar und somit auch die linke Seite. Wenn man die Differentialgleichung (4.7a) einmal unter Verwendung der Kettenregel nach t differenziert, so kann man die zweite Ableitung der Lösung mit Hilfe der Funktionen u und f ausdrücken:

$$u''(t) = \partial_t f(t, u(t)) + \partial_v f(t, u(t))u'(t) = \partial_t f(t, u(t)) + \partial_v f(t, u(t))f(t, u(t)).$$

Beweis. (von Satz 4.3). Der Beweis ist in vier Schritte unterteilt.

Schritt 1 (Lokaler Fehler). Für $v_{j+1} := u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))$ gilt

$$\|u(t_{j+1}) - v_{j+1}\| \leq \frac{h^2}{2} \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\|, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

$v_{j+1} := u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))$ beschreibt den Wert, der beim Einsetzen der exakten Lösung $u(t_j)$ in das explizite Euler-Verfahren entsteht. Der Fehler $\|u(t_{j+1}) - v_{j+1}\|$, der hierbei entsteht, wird **lokaler Fehler** genannt.

Aus $v_{j+1} = u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))$, (4.7a) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} \|u(t_{j+1}) - v_{j+1}\| &= \|u(t_{j+1}) - u(t_j) - hf(t_j, u(t_j))\| = \|u(t_{j+1}) - u(t_j) - hu'(t_j)\| \\ &= \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u'(\tau) - u'(t_j)) d\tau \right\| \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|u'(\tau) - u'(t_j)\| d\tau. \end{aligned}$$

Für den Integranden erhalten wir mit dem Mittelwertsatz 2.8

$$\|u'(\tau) - u'(t_j)\| \leq \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\| (\tau - t_j), \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}],$$

so dass sich durch Zusammensetzen ergibt

$$\|u(t_{j+1}) - v_{j+1}\| \leq \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tau - t_j) d\tau = \frac{h^2}{2} \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\|.$$

Schritt 2 (Lokale Fehlerfortpflanzung). Es gilt

$$\|u_{j+1} - v_{j+1}\| \leq (1 + Lh) \|u_j - u(t_j)\|, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

In diesem Schritt vergleichen wir den durch das Euler-Verfahren berechneten Wert

u_{j+1} mit v_{j+1} . Der Fehler $\|u_{j+1} - v_{j+1}\|$, der hierbei entsteht, wird **fortgeplanter Fehler** genannt.

Aus (4.3), $v_{j+1} = u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))$, der Dreiecksungleichung und der Lipschitz-Beschränktheit von f erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u_{j+1} - v_{j+1}\| &= \|u_j + hf(t_j, u_j) - u(t_j) - hf(t_j, u(t_j))\| \\ &\leq \|u_j - u(t_j)\| + h \|f(t_j, u_j) - f(t_j, u(t_j))\| \leq (1 + Lh) \|u_j - u(t_j)\|. \end{aligned}$$

Schritt 3 (Gesamtfehler). *Es gilt*

$$\|u_j - u(t_j)\| \leq \frac{(1 + Lh)^j - 1}{2L} Mh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

wobei $M := \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\|$.

Man beachte, dass die Abschätzung (4.11) auch im Fall $L = 0$ gilt, wenn man den Quotienten $\frac{(1+Lh)^j - 1}{2L}$ durch seinen Grenzwert $\frac{j}{2}$ für $L \rightarrow 0$ ersetzt.

Der Beweis von Schritt 3 erfolgt durch vollständige Induktion über $j \in I_h$.

Induktionsanfang ($j = 0$): Da der Startwert des Euler-Verfahrens durch die exakten Anfangsdaten in (4.7b) gegeben ist, gilt

$$\|u_0 - u(t_0)\| = 0 = \frac{(1 + Lh)^0 - 1}{2L} Mh.$$

Induktionsschritt ($j \rightarrow j + 1$): Aus der Dreiecksungleichung, (4.9), (4.10) sowie der Induktionsvoraussetzung (4.11) folgt

$$\begin{aligned} \|u_{j+1} - u(t_{j+1})\| &\leq \|u_{j+1} - v_{j+1}\| + \|v_{j+1} - u(t_{j+1})\| \\ &\leq (1 + Lh) \|u_j - u(t_j)\| + \frac{h^2}{2} \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\| \\ &\leq (1 + Lh) \frac{(1 + Lh)^j - 1}{2L} Mh + \frac{h^2}{2} M \\ &= \frac{1}{2L} ((1 + Lh)^{j+1} - 1 - Lh + Lh) Mh = \frac{(1 + Lh)^{j+1} - 1}{2L} Mh. \end{aligned}$$

Der Idee des Induktionsschrittes ist es, den Gesamtfehler durch eine Dreiecksungleichung in die Summe des lokalen und fortgeplanten Fehlers zu zerlegen.

Schritt 4 (Konvergenzfehler). *Es gilt*

$$\exists C = C(T, u, L) > 0 : \|u(t_j) - u_j\| \leq Ch, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Aus $1 + x \leq e^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir für $x = \frac{LT}{N}$

$$\left(1 + \frac{LT}{N}\right) \leq e^{\frac{LT}{N}}, \quad \text{also} \quad \left(1 + \frac{LT}{N}\right)^N \leq e^{LT}.$$

Aus $h = \frac{T}{N}$ und $j \leq N$ folgt

$$(1 + Lh)^j \leq (1 + Lh)^N \leq e^{LT}.$$

Dies impliziert mit Hilfe von (4.11)

$$\|u_j - u(t_j)\| \leq \frac{(1 + Lh)^j - 1}{2L} Mh \leq \frac{e^{LT} - 1}{2L} Mh =: Ch,$$

wobei

$$C := \frac{e^{LT} - 1}{2L} \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\|. \quad (4.13)$$

□

Bemerkung 4.5. Man kann auch in jedem Schritt des Euler-Verfahrens einen Rundungsfehler ε_j zulassen:

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j) + \varepsilon_j,$$

wobei man $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$ für alle j fordert. Hierbei ist ε die Maschinengenauigkeit, die üblicherweise von der Größenordnung 10^{-16} ist. Auf demselben Wege wie oben zeigt man dann

$$\|u_j - u(t_j)\| \leq \frac{e^{LT} - 1}{2L} \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\| h + 2\frac{\varepsilon}{h}$$

für $j = 0, \dots, N$. Der hierdurch verursachte zusätzliche Fehler wird erst bei extrem kleinen Schrittweiten relevant. Man beachte, dass die Funktion $\eta(h) = Mh + 2\frac{\varepsilon}{h}$ ihr Minimum bei $h_{\min} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}$ annimmt, wobei h_{\min} üblicherweise von der Größenordnung 10^{-8} ist. Erst unter diesem Wert werden Rundungsfehler relevant und können die Genauigkeit wieder verschlechtern.

4.3 Die Methode von Heun

Das Euler-Verfahren wertet das Richtungsfeld in jedem Schritt immer nur an einem Punkt aus. Bessere Verfahren (also Verfahren mit einer höheren Konvergenzordnung) erhält man, wenn man das Richtungsfeld an mehreren Stellen auswertet. Ein weiteres Verfahren, das das Richtungsfeld in jedem Schritt an zwei Punkten auswertet, ist die Methode von Heun.

Methode von Heun:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2} (f(t_j, u_j) + f(t_j + h, u_j + hf(t_j, u_j))), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

wobei $u_0 := u(t_0) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

(4.14) heißt die **Methode von Heun** (oder **Heun-Verfahren**).

Der folgende Satz zeigt, dass die Methode von Heun die Konvergenzordnung 2 besitzt, insofern f sogar $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erfüllt.

Satz 4.6 (Konvergenzsatz für die Methode von Heun). Seien die Voraussetzungen von Satz 4.3 erfüllt und sei zusätzlich $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Weiter bezeichne

$u \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ die nach Satz 2.11 eindeutige globale Lösung der Anfangswertaufgabe (4.7) und u_j die Approximation dieser Lösung mit der Methode von Heun an den Stellen $t_j = jh \in J_h$. Dann gilt

$$\exists C = C(T, u, L) > 0 : \|u(t_j) - u_j\| \leq Ch^2 \quad \forall j \in J_h. \quad (4.15)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem von Satz 4.3 in vier Schritte unterteilt.

Schritt 1 (Lokaler Fehler).

Für $v_{j+1} := u(t_j) + \frac{h}{2}(f(t_j, u(t_j)) + f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))))$ gilt

$$\|u(t_{j+1}) - v_{j+1}\| \leq Mh^3, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

Wegen $f \in C^2(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $u \in C^3(J, \mathbb{R}^n)$ gilt nach der Taylorformel

$$\begin{aligned} f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))) &= f(t_j, u(t_j)) + \partial_t f(t_j, u(t_j))h \\ &\quad + \partial_v f(t_j, u(t_j))f(t_j, u(t_j))h + R_2(f; (t_j, u(t_j))), \\ u(t_{j+1}) &= u(t_j) + u'(t_j)h + \frac{h^2}{2}u''(t_j) + R_3(u; t_j), \end{aligned}$$

wobei die Restglieder die folgenden Restgliedabschätzungen erfüllen

$$\begin{aligned} \|R_2\| &:= \|R_2(f; (t_j, u(t_j)))\| \leq Mh^2, \\ \|R_3\| &:= \|R_3(u; t_j)\| \leq Mh^3. \end{aligned}$$

Aus $v_{j+1} := u(t_j) + \frac{h}{2}(f(t_j, u(t_j)) + f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))))$, der Taylorformel, der Restgliedabschätzungen und der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} &\|u(t_{j+1}) - v_{j+1}\| \\ &= \left\| u(t_{j+1}) - u(t_j) - \frac{h}{2}(f(t_j, u(t_j)) + f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j)))) \right\| \\ &= \left\| u(t_j) + u'(t_j)h + \frac{h^2}{2}u''(t_j) + R_3 - u(t_j) - \frac{h}{2}f(t_j, u(t_j)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{h}{2}f(t_j, u(t_j)) - \frac{h^2}{2}(\partial_t f(t_j, u(t_j)) + \partial_v f(t_j, u(t_j))f(t_j, u(t_j))) - \frac{h}{2}R_2 \right\| \\ &= \left\| u'(t_j)h + \frac{h^2}{2}u''(t_j) + R_3 - hu'(t_j) - \frac{h^2}{2}u''(t_j) - \frac{h}{2}R_2 \right\| \\ &\leq \|R_3\| + \frac{h}{2}\|R_2\| \leq Mh^3. \end{aligned}$$

Schritt 2 (Lokale Fehlerfortpflanzung). Es gilt

$$\|u_{j+1} - v_{j+1}\| \leq \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right) \|u_j - u(t_j)\|, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

Aus (4.14), $v_{j+1} := u(t_j) + \frac{h}{2}(f(t_j, u(t_j)) + f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j))))$, der Dreiecksungleichung und der Lipschitz-Beschränktheit von f erhalten wir

$$\|u_{j+1} - v_{j+1}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| u_j + \frac{h}{2} (f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_j + hf(t_j, u_j))) - u(t_j) \right. \\
&\quad \left. - \frac{h}{2} (f(t_j, u(t_j)) + f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j)))) \right\| \\
&\leq \|u_j - u(t_j)\| + \frac{h}{2} \|f(t_j, u_j) - f(t_j, u(t_j))\| \\
&\quad + \frac{h}{2} \|f(t_{j+1}, u_j + hf(t_j, u_j)) - f(t_{j+1}, u(t_j) + hf(t_j, u(t_j)))\| \\
&\leq \|u_j - u(t_j)\| + \frac{Lh}{2} \|u_j - u(t_j)\| + \frac{Lh}{2} \|u_j + hf(t_j, u_j) - u(t_j) - hf(t_j, u(t_j))\| \\
&\leq (1 + Lh) \|u_j - u(t_j)\| + \frac{Lh^2}{2} \|f(t_j, u_j) - f(t_j, u(t_j))\| \\
&\leq \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right) \|u_j - u(t_j)\|.
\end{aligned}$$

Schritt 3 (Gesamtfehler). *Es gilt*

$$\|u_j - u(t_j)\| \leq Mh^3 \sum_{i=0}^{j-1} \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right)^i, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Der Beweis von Schritt 3 erfolgt durch vollständige Induktion über $j \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang ($j = 0$): Da der Startwert der Methode von Heun durch die exakten Anfangsdaten in (4.7b) gegeben ist, gilt

$$\|u_0 - u(t_0)\| = 0 = Mh^3 \sum_{i=0}^{-1} \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right)^i.$$

Induktionsschritt ($j \rightarrow j + 1$): Aus der Dreiecksungleichung, (4.16), (4.17) sowie der Induktionsvoraussetzung (4.18) folgt

$$\begin{aligned}
&\|u_{j+1} - u(t_{j+1})\| \leq \|u_{j+1} - v_{j+1}\| + \|v_{j+1} - u(t_{j+1})\| \\
&\leq \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right) \|u_j - v_j\| + Mh^3 \\
&\leq \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right) Mh^3 \sum_{i=0}^{j-1} \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right)^i + Mh^3 \\
&= Mh^3 \left(1 + \sum_{i=0}^{j-1} \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right)^{i+1}\right) \\
&= Mh^3 \left(1 + \sum_{i=1}^j \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right)^i\right) \\
&= Mh^3 \sum_{i=0}^j \left(1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2}\right)^i.
\end{aligned}$$

Der Idee des Induktionsschrittes ist es, den Gesamtfehler durch eine Dreiecksungleichung in die Summe des lokalen und fortgepflanzten Fehlers zu zerlegen.

Schritt 4 (Konvergenzfehler). Es gilt

$$\exists C = C(T, u, L) > 0 : \|u(t_j) - u_j\| \leq Ch^2, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

Unter Verwendung von $h = \frac{T}{N}$ und der folgenden Hilfsmittel

$$\sum_{i=0}^{j-1} q^i = \frac{q^j - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1 \quad (\text{geometrische Summe}),$$

$$L + \frac{L^2 h}{2} > L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{L + \frac{L^2 h}{2}} < \frac{1}{L},$$

$$J \geq N \quad \Rightarrow \quad \frac{j}{N} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad LT \frac{j}{N} \leq LT \quad \Rightarrow \quad \exp\left(LT \frac{j}{N}\right) \leq \exp(LT),$$

$$\sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \geq 0,$$

erhalten wir mit Hilfe von (4.18)

$$\begin{aligned} \|u_j - u(t_j)\| &\leq Mh^3 \sum_{i=0}^{j-1} \left(1 + Lh + \frac{L^2 h^2}{2}\right)^i = Mh^3 \frac{\left(1 + Lh + \frac{L^2 h^2}{2}\right)^j - 1}{\left(1 + Lh + \frac{L^2 h^2}{2}\right) - 1} \\ &= Mh^2 \frac{\left(1 + Lh + \frac{L^2 h^2}{2}\right)^j - 1}{L + \frac{L^2 h}{2}} \leq Mh^2 \frac{\left(1 + Lh + \frac{L^2 h^2}{2}\right)^j - 1}{L} \\ &\leq Mh^2 \frac{e^{Lhj} - 1}{L} = Mh^2 \frac{e^{LT \frac{j}{N}} - 1}{L} \leq Mh^2 \frac{e^{LT} - 1}{L}, \end{aligned}$$

wobei

$$C := M \frac{e^{LT} - 1}{L}.$$

□

4.4 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

Noch bessere Verfahren (also Verfahren mit einer noch höheren Konvergenzordnung) erhalten wir durch Abtastung weiterer Punkte des Richtungsfeldes. Dies wird beispielsweise bei den Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung realisiert, deren Einführung den Rahmen der Vorlesung jedoch sprengen würde. Daher betrachten wir an dieser Stelle lediglich das folgende Verfahren aus der Klasse der expliziten Runge-Kutta-Verfahren:

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.20)$$

wobei k_1, k_2, k_3, k_4 durch

$$\begin{aligned} k_1 &:= f(t_j, u_j), \\ k_2 &:= f\left(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &:= f\left(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &:= f(t_j + h, u_j + hk_3) \end{aligned}$$

gegeben sind und $u_0 := u(t_0) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

(4.20) heißt **klassisches Runge-Kutta-Verfahren**.

Der folgende Satz zeigt, dass das klassische Runge-Kutta-Verfahren die Konvergenzordnung 4 besitzt, insofern f sogar $f \in C^4([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erfüllt.

Satz 4.7 (Konvergenzsatz für das klassische Runge-Kutta-Verfahren). *Seien die Voraussetzungen von Satz 4.3 erfüllt und sei zusätzlich $f \in C^4([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Weiter bezeichne $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ die nach Satz 2.11 eindeutige globale Lösung der Anfangswertaufgabe (4.7) und u_j die Approximation dieser Lösung mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren an den Stellen $t_j = jh \in J_h$. Dann gilt*

$$\exists C = C(T, u, L) > 0 : \|u(t_j) - u_j\| \leq Ch^4 \quad \forall j \in I_h. \quad (4.21)$$

4.5 Das implizite Euler-Verfahren und die Newton-Methode

Bei dem expliziten Euler-Verfahren wurde für die Berechnung der Iterierten u_{j+1} das Richtungsfeld an der aktuellen Stelle (t_j, u_j) ausgewertet. Anstatt das Richtungsfeld an der aktuellen Stelle (t_j, u_j) auszuwerten, kann man das Richtungsfeld natürlich auch am Zielpunkt (t_{j+1}, u_{j+1}) berücksichtigen. Dies führt auf das folgende Verfahren.

Implizites Euler-Verfahren:

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.22)$$

wobei $u_0 := u(t_0) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

(4.22) heißt **implizites Euler-Verfahren**. Dieses Verfahren ist **implizit**, da f von u_{j+1} abhängt. Da f im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion ist, können wir die Gleichung (4.22) nicht ohne weiteres nach u_{j+1} auflösen. Genauer müssen wir zur Bestimmung von u_{j+1} eine nicht-triviale Aufgabe lösen: Definieren wir

$$g(x) := x - u_j - hf(t_{j+1}, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.23)$$

so ist u_{j+1} eine Nullstelle der Funktion g . Diese Nullstelle werden wir im Folgenden mit Hilfe des sogenannten **Newton-Verfahrens** bestimmen.

Dieses Verfahren dient allgemein dazu, für eine gegebene stetig differenzierbare (i.A. nichtlineare) Abbildung $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lösungen des Gleichungssystems

$$g(x) = 0, \quad \text{ausgeschrieben} \quad \begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

zu approximieren. Man erzeugt eine Folge von Vektoren $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$, die gegen eine solche Lösung für $k \rightarrow \infty$ konvergieren soll. Die Idee, um $x^{(k+1)}$ aus $x^{(k)}$ zu konstruieren, ist die folgende: Nach Definition der totalen Differenzierbarkeit lässt sich g in der Nähe von $x^{(k)}$ durch die folgende affin lineare Abbildung $L_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gut approximieren:

$$L_k(x) = Dg(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + g(x^{(k)}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.25)$$

Dabei ist die totale Ableitung $Dg(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^{(k)})\right)_{i,j=1}^n$ durch die Matrix der partiellen Ableitungen gegeben. Die gute lokale Approximation ergibt sich aus den Eigenschaften $L_k(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $DL_k(x^{(k)}) = Dg(x^{(k)})$ und

$$\frac{\|g(x) - L_k(x)\|}{\|x - x^{(k)}\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x^{(k)}, x \neq x^{(k)}.$$

Anstelle von (4.24) löst man nun die Gleichung $L_k(x) = 0$ und erhält so $x^{(k+1)}$, also

$$0 = Dg(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + g(x^{(k)}) \quad \text{bzw.} \quad Dg(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)}). \quad (4.26)$$

Wenn $Dg(x^{(k)})$ invertierbar ist, so hat das Gleichungssystem in (4.26) eine eindeutige Lösung und man erhält $x^{(k+1)} = x^{(k)} - Dg(x^{(k)})^{-1}g(x^{(k)})$. In der Praxis rechnet man die Inverse von $Dg(x^{(k)})$ niemals aus, sondern löst das lineare Gleichungssystem in (4.26) mit einem geeigneten Verfahren. Die bekannteste Methode ist das **Gaußsche Eliminationsverfahren**, auf das hier nicht näher eingegangen wird. Einige Programmiersprachen (z.B. MATLAB) bieten hierfür vordefinierte Funktionen an.

Newton-Verfahren: Gegeben $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und eine Startnäherung $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Approximiere eine Nullstelle von g mit der Folge $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ erzeugt durch

$$\text{Löse das lineare System} \quad Dg(x^{(k)})y^{(k)} = g(x^{(k)}) \quad (4.27)$$

$$\text{und setze} \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - y^{(k)}. \quad (4.28)$$

Den Vektor $y^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ nennt man auch den **Newton-Korrektor**. Natürlich kann man i.A. nicht erwarten, dass die Folge $x^{(k)}$ konvergiert und man so eine Nullstelle erhält. In der Numerischen Mathematik beweist man aber den folgenden Konvergenzsatz, der dieses wenigstens dann garantiert, wenn man hinreichend nahe an einer Lösung \bar{x} startet, für die $Dg(\bar{x})$ invertierbar ist.

Satz 4.8 (Lokaler Konvergenzsatz für die Newton-Methode). Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle von $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $Dg(\bar{x})$ invertierbar. Dann existiert eine Umgebung \mathcal{U} von \bar{x} und eine Konstante $C \geq 0$, so dass für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in \mathcal{U}$ die Folge $x^{(k)}$ wohldefiniert ist, in \mathcal{U} liegt und gegen \bar{x} konvergiert. Ferner gilt

$$\|\bar{x} - x^{(k+1)}\| \leq C \|\bar{x} - x^{(k)}\|^2 \quad \text{für alle } k \geq 0. \quad (4.29)$$

Hinter der Wohldefiniertheit verbirgt sich die Aussage, dass $Dg(x^{(k)})$ für jedes k invertierbar ist. Die Eigenschaft (4.29) bezeichnet man auch als quadratische Konvergenz des Verfahrens. Sie führt in der Regel dazu, dass die Folge sehr schnell konvergiert (z.B. in 4 oder 5 Schritten die Lösung bis auf die Maschinengenauigkeit erreicht), falls sie überhaupt konvergiert.

Es bleibt noch die praktische Frage, bei welchem Index k man die Newton-Iteration abbrechen soll. Eine gängige Vorgehensweise ist, abzubrechen, wenn der Newton-Korrektor hinreichend klein ist,

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|y^{(k)}\| \leq \text{tol} \quad (\text{vorgegebene Toleranz}),$$

oder wenn das sogenannte **Residuum** hinreichend klein ist

$$\text{res}(x^{(k)}) = \|g(x^{(k)})\| \leq \text{tol}.$$

Wir kehren zu unserer Aufgabe zurück, bei der wir in jedem Schritt des impliziten Euler-Verfahrens ein spezielles nichtlineares System mit g wie in (4.23) definiert lösen müssen. In diesem Fall haben wir eine gute Startnäherung, nämlich

$$x^{(0)} := u_j.$$

Denn für kleine Schrittweiten h können wir erwarten, dass auch das Residuum $\|g(u_j)\| = h\|f(t_{j+1}, u_j)\|$ klein genug ist, um in der in Satz 4.8 beschriebenen Konvergenz Umgebung \mathcal{U} zu liegen.

Wir fassen zusammen. Beim impliziten Euler-Verfahren berechnen wir u_{j+1} aus (4.22) als Nullstelle von g aus (4.23) mit Hilfe des Newton-Verfahrens aus (4.27), (4.28). Der Pseudocode lautet:

```

for  $j = 0, 1, 2, \dots$  do
  Setze  $g(x) := x - u_j - hf(t_{j+1}, x)$ ;
  Setze  $Dg(x) = I_n - hD_v f(t_{j+1}, x)$ ;
  Setze  $x^{(0)} := u_j$ ;
  for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
    Loese  $Dg(x^{(k)})y^{(k)} = g(x^{(k)})$ ;
    Setze  $x^{(k+1)} := x^{(k)} - y^{(k)}$ ;
    if  $\|y^{(k)}\| \leq \text{tol}$  then
      Akzeptiere Loesung  $x^{(k+1)}$ ;
    end
  end
  Setze  $u_{j+1} := x^{(k+1)}$ ;
end

```

Erst durch die Angabe einer Methode zur Lösung der impliziten Gleichung erhält man aus dem impliziten Euler-Verfahren ein vollständig beschriebenes Verfahren. Man tut natürlich gut daran, eine Sicherung einzubauen, falls die obige Konvergenzbedingung nach einer vorgegebenen Anzahl K von Schritten nicht erfüllt ist. Wenn dies geschieht, kann man z.B. die Schrittweite halbieren und es erneut versuchen, oder die Rechnung ganz abbrechen.

Wie die numerischen Rechnungen zeigen, kann man mit dem impliziten Euler-Verfahren auch Aufgaben der Form (4.6)

$$u'(t) = t - (u(t))^2, \quad u(0) = u_0 \geq 0$$

gut approximieren, ohne die Schrittweite h stark zu reduzieren und ohne Oszillationen wie beim Euler-Verfahren zu erhalten, vgl. (4.6) in Beispiel 4.2. Daher lohnt sich z.B. in diesem Fall durchaus der Aufwand, den man in jedem einzelnen Schritt mit dem Newton-Verfahren betreibt.

Durch Verschärfung der Konvergenztheorie von Satz 4.3 kann man dieses Verhalten auch theoretisch erklären. Im Falle des expliziten Euler-Verfahrens erfasst die Konstante C aus (4.13) das Fehlerverhalten sehr genau. Sie wächst mit der Länge T des Zeitintervalls exponentiell an, wobei im Exponenten die Lipschitz-Konstante $L = \sup |D_v f(t, v)|$ (vgl. Lemma 2.9) auftaucht. Für das implizite Verfahren kann man dagegen zeigen, dass im eindimensionalen Fall in der Fehlerabschätzung anstelle des Betragsmaximums von $D_v f$ im Exponenten nur das einfache Maximum von $D_v f$ auftaucht. Dies hat gerade in dem oben behandelten Beispiel $f(t, v) = t - v^2$ mit $D_v f(t, v) = -2v$ im Bereich $v \geq 0$ höchstens den Wert 0. Für eine detaillierte Behandlung dieses Phänomens verweisen wir auf die Lehrbücher, z.B. [2],[4].

5 Differentialgleichungen höherer Ordnung und lineare Systeme

5.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem Abschnitt untersuchen wir Differentialgleichungen höherer Ordnung und beweisen sowohl globale als auch lokale Existenz- und Eindeutigkeitsätze.

Definition 5.1 (Differentialgleichung k -ter Ordnung). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{N}$, dann heißt

$$u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)), \quad t \in J \quad (5.1)$$

eine **Differentialgleichung k -ter Ordnung**.

Beispiel 5.2. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $k = 2$ und

$$f(t, w_1, w_2) = -w_2 - 6w_1^2 + t, \quad t \in J, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R},$$

dann lautet die zugehörige Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) = -u'(t) - 6(u(t))^2 + t, \quad t \in J.$$

Transformation auf System 1. Ordnung: Sei $u \in C^k(J, \mathbb{R})$ eine Lösung von (5.1). Betrachten wir die Transformation

$$\begin{aligned} v_1(t) &:= u(t), \\ v_2(t) &:= u'(t), \\ &\vdots \\ v_k(t) &:= u^{(k-1)}(t), \end{aligned}$$

so liefert das Differenzieren der Transformation nach t

$$\begin{aligned} v_1'(t) &:= v_2(t), \\ v_2'(t) &:= v_3(t), \\ &\vdots \\ v_{k-1}'(t) &:= v_k(t), \\ v_k'(t) &:= f(t, v_1(t), \dots, v_k(t)). \end{aligned}$$

Mit der Setzung

$$v(t) := \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_k(t) \end{pmatrix}, \quad F(t, w) := \begin{pmatrix} w_2 \\ \vdots \\ w_k \\ f(t, w_1, \dots, w_k) \end{pmatrix}, \quad F \in C(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \quad (5.2)$$

erhalten wir $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ und v löst das folgende System 1. Ordnung

$$v'(t) = F(t, v(t)), \quad t \in J. \quad (5.3)$$

Sei umgekehrt $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ eine Lösung von (5.3). Setzen wir $u := v_1$, dann gilt $u \in C^k(J, \mathbb{R})$ und u löst (5.1).

Um die Lösungen von (5.3) eindeutig zu machen, müssen wir der Differentialgleichung (5.3) eine Anfangsbedingung hinzufügen. Ergänzen wir also die Differentialgleichung 1. Ordnung (5.3) um die Anfangsbedingung

$$v(t_0) = v_0 = \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ \vdots \\ v_{0,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

für ein $t_0 \in J$, so ist dies wegen der Transformation gleichbedeutend mit den k Anfangsbedingungen für die Differentialgleichung k -ter Ordnung (5.1)

$$\begin{aligned} u(t_0) &= v_{0,1}, \\ u'(t_0) &= v_{0,2}, \\ &\vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) &= v_{0,k}. \end{aligned}$$

Die zusätzliche Forderung dieser Anfangsbedingungen wird dann relevant, wenn wir die Eindeutigkeit der Lösungen von (5.1) bzw. (5.3) in Satz 5.4 untersuchen. Bevor wir dies jedoch genauer analysieren, betrachten wir zunächst das folgende Beispiel.

Beispiel 5.3. Betrachte die Differentialgleichung 2. Ordnung aus Beispiel 5.2

$$u''(t) = -u'(t) - 6(u(t))^2 + t, \quad t \in J. \quad (5.4)$$

Die Transformation

$$\begin{aligned} v_1(t) &:= u(t), \\ v_2(t) &:= u'(t) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= u'(t) = v_2(t), \\ v_2'(t) &= u''(t) = -u'(t) - 6(u(t))^2 + t = -v_2(t) - 6(v_1(t))^2 + t \end{aligned}$$

also die folgende Differentialgleichung 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -v_2(t) - 6(v_1(t))^2 + t \end{pmatrix} =: F(t, v(t)), \quad F(t, w) := \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_2 - 6w_1^2 + t \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Die Anfangsbedingung

$$v(t_0) = \begin{pmatrix} v_1(t_0) \\ v_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

für (5.5) entspricht den folgenden zwei Anfangsbedingungen für (5.4)

$$\begin{aligned} u(t_0) &= 1, \\ u'(t_0) &= 2. \end{aligned}$$

Im Folgenden untersuchen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der **Anfangswertaufgabe k -ter Ordnung**

$$u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)), \quad t \in J, \quad (5.6a)$$

$$u(t_0) = v_{0,1}, \quad u'(t_0) = v_{0,2}, \dots, \quad u^{(k-1)}(t_0) = v_{0,k}, \quad (5.6b)$$

wobei

$$J \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Intervall, } \quad t_0 \in J \quad \text{und} \quad v_0 = \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ \vdots \\ v_{0,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

Eine Anfangswertaufgabe k -ter Ordnung besteht zum einen aus einer Differentialgleichung k -ter Ordnung und zum anderen aus k Anfangsbedingungen.

Satz 5.4 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz, globale Version). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $(t_0, v_0) \in J \times \mathbb{R}^k$ und sei $f \in C(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}^k$ (bezüglich der 2. Variablen) mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, d. h.

$$|f(t, z) - f(t, w)| \leq L \|z - w\|_\infty \quad \forall t \in J \quad \forall z, w \in \mathbb{R}^k.$$

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (5.6) genau eine **globale** Lösung $u \in C^k(J, \mathbb{R})$.

Beweis. Die Transformation von (5.6) auf ein System 1. Ordnung liefert die Anfangswertaufgabe

$$v'(t) = F(t, v(t)), \quad t \in J, \quad (5.7a)$$

$$v(t_0) = v_0, \quad (5.7b)$$

wobei $F \in C(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ durch (5.2) gegeben ist. Nach Satz 2.11 besitzt (5.7) genau eine globale Lösung $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$. Wegen der Transformation auf ein System 1. Ordnung besitzt somit auch (5.6) genau eine globale Lösung $u \in C^k(J, \mathbb{R})$, welche

durch $u := v_1$ gegeben ist.

Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 2.11: Es ist

$$n = k, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty \quad F \in C(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \text{ gegeben durch (5.2)}$$

und F ist Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}^k$ (bezüglich v) mit Lipschitz-Konstante $\max(1, L)$, denn

$$\begin{aligned} \|F(t, z) - F(t, w)\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} z_2 - w_2 \\ \vdots \\ z_k - w_k \\ f(t, z) - f(t, w) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max\{|z_2 - w_2|, \dots, |z_k - w_k|, |f(t, z) - f(t, w)|\} \\ &\leq \max(1, L) \|z - w\|_\infty \quad \forall t \in J \quad \forall z, w \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

□

Folgerung 5.5 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz, lokale Version). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $(t_0, v_0) \in J \times \mathbb{R}^k$,

$$Q_\beta := \{w \in \mathbb{R}^k \mid \|w - v_0\|_\infty \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

und sei $f \in C(J \times Q_\beta, \mathbb{R})$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q_\beta$ (bezüglich v) mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (5.6) genau eine lokale Lösung $u \in C^k(I, \mathbb{R})$, wobei

$$I := J \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad \alpha := \frac{\beta}{M}, \quad M := \max_{(t,w) \in J \times Q_\beta} \max\{\|w\|_\infty, |f(t, w)|\}.$$

Beweis. Man beachte bei der Anwendung von Satz 2.16, dass

$$\begin{aligned} \max_{(t,w) \in J \times Q_\beta} \|F(t, w)\|_\infty &= \max_{(t,w) \in J \times Q_\beta} \max\{|w_2|, \dots, |w_k|, |f(t, w_1, \dots, w_k)|\} \\ &\leq \max_{(t,w) \in J \times Q_\beta} \max\{\|w\|_\infty, |f(t, w)|\} \end{aligned}$$

gilt.

□

5.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0, \quad t \in J, \quad (5.8)$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in C(J, \mathbb{R})$ seien. Im Folgenden suchen wir Lösungen $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ von (5.8).

Das folgende Lemma zeigt, dass Linearkombinationen von Lösungen von (5.8) wieder Lösungen von (5.8) sind.

Lemma 5.6. Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in C(J, \mathbb{R})$. Weiter seien $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (5.8), dann erfüllt die Linearkombination

$$u(t) := \alpha u_1(t) + \beta u_2(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

die Bedingung $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ und u ist eine Lösung von (5.8).

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (5.8), dann erfüllt u aus (5.9) offensichtlich $u \in C^2(J, \mathbb{R})$. Damit ist u hinreichend glatt, um die folgenden Beweisschritte durchzuführen. Es bleibt zu zeigen, dass u die Differentialgleichung (5.8) löst: Differenzieren von (5.9) nach t liefert (für $t \in J$)

$$\begin{aligned} u'(t) &= \alpha u_1'(t) + \beta u_2'(t), \\ u''(t) &= \alpha u_1''(t) + \beta u_2''(t). \end{aligned}$$

Einsetzen in (5.8) liefert (für $t \in J$)

$$\begin{aligned} &u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) \\ &= \alpha u_1''(t) + \beta u_2''(t) + a(t)\alpha u_1'(t) + a(t)\beta u_2'(t) + b(t)\alpha u_1(t) + b(t)\beta u_2(t) \\ &= \alpha (u_1''(t) + a(t)u_1'(t) + b(t)u_1(t)) + \beta (u_2''(t) + a(t)u_2'(t) + b(t)u_2(t)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (5.8) sind. \square

Die Differentialgleichung (5.8) lässt sich auch mit Hilfe eines Differentialoperators beschreiben.

Definition 5.7 (Linearer Differentialoperator 2. Ordnung). Die Abbildung

$$L : C^2(J, \mathbb{R}) \rightarrow C(J, \mathbb{R}), \quad [Lu](t) := u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t), t \in J$$

heißt **linearer Differentialoperator 2. Ordnung**.

Für $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ gilt $Lu \in C(J, \mathbb{R})$, d. h. dass

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t)$$

eine in J stetige Funktion ist. Verwenden wir diese Operatorschreibweise, so lässt sich (5.8) ausdrücken durch

$$[Lu](t) = 0, t \in J.$$

Der Differentialoperator L ist linear, d. h. es gilt

$$L(\alpha u_1 - \beta u_2) = \alpha(Lu_1) + \beta(Lu_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R}).$$

Dies wurde bereits in Lemma 5.6 bewiesen.

Von besonderem Interesse sind linear unabhängige Lösungen von (5.8).

Definition 5.8 (Linear unabhängige Funktionen). Die Funktionen $u_1, \dots, u_k \in C(J, \mathbb{R})$ heißen **linear unabhängig**, falls

$$\lambda_1 u_1(t) + \dots + \lambda_k u_k(t) = 0 \quad \forall t \in J \quad \implies \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Andernfalls nennen wir die Funktionen u_1, \dots, u_k **linear abhängig**.

Beispiel 5.9 (Linear unabhängige Funktionen). Betrachte $J = \mathbb{R}$, $k = 2$ und $u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R})$ mit $u_1(t) = t$, $u_2(t) = t^2$. Es gelte für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 t + \lambda_2 t^2 = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Auswerten bei $t = 1$ und $t = 2$ liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also sind u_1, u_2 linear unabhängig.

Beispiel 5.10 (Linear abhängige Funktionen). Betrachte $J = \mathbb{R}$, $k = 2$ und $u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R})$ mit $u_1(t) = 2e^t$, $u_2(t) = e^t$. Es gelte für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 2e^t + \lambda_2 e^t = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \stackrel{e^t \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}}{\iff} \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt außer $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ auch die Lösung $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Also sind u_1, u_2 nicht linear unabhängig, d. h. u_1, u_2 sind linear abhängig.

Wir untersuchen nun die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung.

Satz 5.11 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz, globale Version). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $t_0 \in J$, $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und $a, b, r \in C(J, \mathbb{R})$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = r(t), \quad t \in J, \quad (5.10a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0 \quad (5.10b)$$

genau eine **globale** Lösung $u \in C^2(J, \mathbb{R})$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 5.4. Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 5.4: Es ist

$$k = 2, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad f \in C(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ gegeben durch}$$

$$f(t, v) := r(t) - a(t)v_2 - b(t)v_1, \quad t \in J, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

und f ist Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}^2$ (bezüglich v) mit Lipschitz-Konstante $\max_{t \in J} |a(t)| + \max_{t \in J} |b(t)|$, denn

$$|f(t, v) - f(t, w)| = |r(t) - a(t)v_2 - b(t)v_1 - r(t) + a(t)w_2 + b(t)w_1|$$

$$\begin{aligned} &\leq |a(t)| |v_2 - w_2| + |b(t)| |v_1 - w_1| \\ &\leq \left(\max_{t \in J} |a(t)| + \max_{t \in J} |b(t)| \right) \|v - w\|_\infty \quad \forall t \in J \forall v, w \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass $\max_{t \in J} |a(t)| < \infty$ und $\max_{t \in J} |b(t)| < \infty$ gilt, denn als stetige Funktionen auf dem kompakten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ nehmen die Funktionen a und b auf J ihr Maximum und Minimum an, also insbesondere ihre Betragsmaxima. \square

Bemerkung 5.12. Satz 5.11 gilt sogar für beliebige Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$, also z. B. auch für

$$J = [t_0, \infty) \quad \text{oder} \quad J = (-\infty, \infty) = \mathbb{R},$$

denn Satz 5.11 ist auf jedem kompakten Teilintervall von J anwendbar.

Schöpft man nun J durch kompakte Intervalle J_n aus (z. B. $J_n = [-n, n]$ im Fall $J = \mathbb{R}$), so stimmen die Lösungen $u_n \in C^2(J_n, \mathbb{R})$ und $u_k \in C^2(J_k, \mathbb{R})$ für $k \geq n$ auf J_n überein. Für ein gegebenes $t \in J$ wähle man $n = n(t)$ mit $t \in J_n$ und setze $u(t) := u_n(t)$. Dies ist wohldefiniert und liefert die Lösung.

Satz 5.13. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in C(J, \mathbb{R})$. Dann sind zwei Lösungen $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$ von $Lu = 0$ genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2(t_0) \\ u_2'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ für ein } t_0 \in J$$

linear unabhängig sind.

Beweis. Für den Beweis verwenden wir die folgende Notation

$$\begin{aligned} v_j &:= \begin{pmatrix} u_j(t_0) \\ u_j'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2, \\ Lu = r, \quad [Lu](t) &= u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t), \quad t \in J. \end{aligned}$$

\Leftarrow : Seien v_1, v_2 linear unabhängig. Weiter seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = 0 \quad \forall t \in J.$$

Differentiation nach t und auswerten bei $t = t_0$ liefert

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1(t_0) + \alpha_2 u_2(t_0) &= 0, \\ \alpha_1 u_1'(t_0) + \alpha_2 u_2'(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise bedeutet dies

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_1'(t_0) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t_0) \\ u_2'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da v_1, v_2 linear unabhängig sind, erhalten wir $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und somit sind auch u_1, u_2 (nach Wahl von α_1, α_2) linear unabhängig.

\Rightarrow : Seien u_1, u_2 linear unabhängig. Weiter seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0.$$

Für $u := \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ gilt dann $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ und

$$[Lu](t) = \alpha_1 [Lu_1](t) + \alpha_2 [Lu_2](t) = 0, \quad t \in J, \quad (5.11a)$$

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_1'(t_0) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t_0) \\ u_2'(t_0) \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0. \quad (5.11b)$$

Da diese Anfangswertaufgabe einerseits die globale Lösung $u(t) = 0$ und andererseits nach Satz 5.11 genau eine globale Lösung besitzt, lautet die einzige Lösung $u(t) = 0$ für $t \in J$, d. h.

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = u(t) = 0 \quad \forall t \in J.$$

Da u_1, u_2 linear unabhängig sind, erhalten wir $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und somit sind auch v_1, v_2 (nach Wahl von α_1, α_2) linear unabhängig. \square

Satz 5.14. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in C(J, \mathbb{R})$. Dann besitzt die Differentialgleichung $Lu = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$. Weiter gibt es zu jeder Lösung $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ von $Lu = 0$ Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

Beweis. Seien u_1, u_2 die Lösungen der Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} [Lu_1](t) &= 0, \quad t \in J, & [Lu_2](t) &= 0, \quad t \in J, \\ \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_1'(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} u_2(t_0) \\ u_2'(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, folgt aus Satz 5.13, dass die Lösungen u_1, u_2 linear unabhängig sind. Damit haben wir zunächst gezeigt, dass es mindestens zwei linear unabhängige Lösungen gibt. Sei $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ eine weitere Lösung von $Lu = 0$. Setzen wir nun

$$\alpha_1 := u(t_0), \quad \alpha_2 := u'(t_0),$$

dann löst $v := u - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2$ die Anfangswertaufgabe

$$Lv = Lu - \alpha_1 Lu_1 - \alpha_2 Lu_2 = 0 - 0 - 0 = 0, \quad t \in J, \quad (5.12a)$$

$$\begin{pmatrix} v(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_1'(t_0) \end{pmatrix} - \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t_0) \\ u_2'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12b)$$

Da die Anfangswertaufgabe (5.12) einerseits die globale Lösung $v(t) = 0$ und andererseits nach Satz 5.11 genau eine globale Lösung besitzt, lautet die einzige Lösung $v(t) = 0$ für $t \in J$, d. h.

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \quad \forall t \in J \quad (5.13)$$

Somit lässt sich jede weitere Lösung u als Linearkombination von u_1, u_2 schreiben. Daher gibt es auch nicht mehr als zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 von $Lu = 0$. Insbesondere ist jede Lösung $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ von $Lu = 0$ von der Form (5.13) für geeignete $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. \square

Definition 5.15 (Fundamentalsystem, Wronski-Matrix, Wronski-Determinante).

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in C(J, \mathbb{R})$ und $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$ zwei linear unabhängige Lösungen von $Lu = 0$, so nennen wir die Menge

$$\{u_1, u_2\}$$

ein **Fundamentalsystem**, die Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, t \in J$$

die **Wronski-Matrix** und die Determinante

$$\det W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t), t \in J$$

die **Wronski-Determinante**.

Folgerung 5.16 (Liouville). Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in C(J, \mathbb{R})$ und $u_1, u_2 \in C^2(J, \mathbb{R})$ zwei Lösungen von $Lu = 0$. Dann erfüllt die Wronski-Determinante

$$\det W(t) = (\det W(t_0)) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right), t \in J.$$

Beweis. Sei $d(t) := \det W(t) := u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)$, $t \in J$, dann gilt

$$\begin{aligned} d'(t) &= u_1'(t)u_2'(t) + u_1(t)u_2''(t) - u_1''(t)u_2(t) - u_1'(t)u_2'(t) \\ &= u_1(t)(-a(t)u_2'(t) - b(t)u_2(t)) - (-a(t)u_1'(t) - b(t)u_1(t))u_2(t) \\ &= -a(t)(u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)) - b(t)(u_1(t)u_2(t) - u_1(t)u_2(t)) \\ &= -a(t)\det W(t) = -a(t)d(t), t \in J, \\ d(t_0) &= \det W(t_0). \end{aligned}$$

Nach der Variation der Konstanten Formel (3.21) gilt für $t \in J$

$$\det W(t) = d(t) = d(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) = (\det W(t_0)) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right).$$

□

Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 5.13 und Folgerung 5.16 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \det W(t_0) &\neq 0 \quad \forall t_0 \in J \\ \iff \exists t_0 \in J : \det W(t_0) &\neq 0 \\ \iff u_1, u_2 \text{ sind linear unabhängig.} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Die erste Äquivalenz folgt aus Folgerung 5.16 und die zweite aus Satz 5.13.

Die Wronski-Determinante ist auch nützlich, um die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = r(t), \quad t \in J, \quad u(t_0) = u'(t_0) = 0 \tag{5.15}$$

zu lösen

Satz 5.17 (Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe). Seien $a, b, r \in C(J, \mathbb{R})$, $t_0 \in J$ und sei $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem von L . Dann besitzt die eindeutige Lösung $\bar{u} \in C^2(J)$ von (5.15) die Darstellung

$$\bar{u}(t) = \int_{t_0}^t (-u_1(t)u_2(s) + u_1(s)u_2(t)) \frac{r(s)}{\det W(s)} ds. \quad (5.16)$$

Die Lösung u der inhomogenen Anfangswertaufgabe (5.10a), (5.10b) ist

$$u(t) = \bar{u}(t) + \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), t \in J, \quad (5.17)$$

wobei α_1, α_2 das folgende lineare Gleichungssystem lösen

$$W(t_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Beweis. Man beachte, dass sich \bar{u} nach (5.16) wie in der Variation der Konstanten Formel schreiben lässt:

$$\bar{u}(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t), \quad c_1(t) = - \int_{t_0}^t \frac{u_2(s)r(s)}{\det W(s)} ds, \quad c_2(t) = \int_{t_0}^t \frac{u_1(s)r(s)}{\det W(s)} ds.$$

Durch Differenzieren folgt mit dem Hauptsatz der Differential- Integralrechnung

$$\begin{aligned} \bar{u}'(t) &= - \frac{u_2(t)r(t)u_1(t)}{\det W(t)} + c_1(t)u_1'(t) + \frac{u_1(t)r(t)u_2(t)}{\det W(t)} + c_2(t)u_2'(t) \\ &= c_1(t)u_1'(t) + c_2(t)u_2'(t), \\ u''(t) &= - \frac{u_2(t)r(t)u_1'(t)}{\det W(t)} + c_1(t)u_1''(t) + \frac{u_1(t)r(t)u_2'(t)}{\det W(t)} + c_2(t)u_2''(t) \\ &= r(t) + c_1(t)u_1''(t) + c_2(t)u_2''(t). \end{aligned}$$

Zusammensetzen liefert also

$$L\bar{u} = r + c_1 Lu_1 + c_2 Lu_2 = r.$$

Schließlich gilt $\bar{u}(t_0) = 0$ und $\bar{u}'(t_0) = c_1(t_0)u_1'(t_0) + c_2(t_0)u_2'(t_0) = 0$. Der zweite Teil des Satzes ist offensichtlich; denn aus der Linearität von L folgt für u aus (5.17)

$$Lu = L\bar{u} + \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2 = L\bar{u} = r,$$

sowie $u(t_0) = \alpha_1 u_1(t_0) + \alpha_2 u_2(t_0) = u_0$ und $u'(t_0) = \alpha_1 u_1'(t_0) + \alpha_2 u_2'(t_0) = v_0$ nach (5.18). \square

Die Formel von Liouville und die Aussagen über alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ lassen sich auf Differentialgleichungen k -ter Ordnung erweitern. Dies lässt sich mit Hilfe der Ergebnisse des nächsten Abschnitts für Systeme 1. Ordnung zeigen, was wir aber nicht im einzelnen ausführen.

Satz 5.18. Seien $u_1, \dots, u_k \in C^k(J, \mathbb{R})$ Lösungen von

$$Lu = u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + a_0u = 0, \quad a_j \in C(J, \mathbb{R}), \quad J \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall,}$$

dann sind die Funktionen u_1, \dots, u_k genau dann linear unabhängig, wenn die Wronski-Matrix

$$W(t_0) = \begin{pmatrix} u_1(t_0) & \cdots & u_k(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-1)}(t_0) & \cdots & u_k^{(k-1)}(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k}$$

für ein $t_0 \in J$ invertierbar ist. Weiter gibt es k linear unabhängige Lösungen $u_1, \dots, u_k \in C^k(J, \mathbb{R})$ von $Lu = 0$ und jede Lösung $u \in C^k(J, \mathbb{R})$ von $Lu = 0$ hat die Form

$$u = \sum_{j=1}^k \alpha_j u_j$$

für geeignete $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

5.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Abschließend untersuchen wir den wichtigen Spezialfall konstanter Koeffizienten, in dem sich ein Fundamentalsystem mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Differentialgleichungen 2. Ordnung) bzw. der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (Systeme 1. Ordnung) bestimmen lassen.

5.3.1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Betrachte zunächst die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.19)$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ seien. Beachte, dass (5.19) ein Spezialfall von (5.8) aus Abschnitt 5.2 ist.

Ansatz: Setzen wir den Ansatz

$$u(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

in (5.19) ein, so folgt

$$0 = (\lambda^2 + a\lambda + b) e^{\lambda t}. \quad (5.20)$$

Definition 5.19 (Charakteristisches Polynom). Das Polynom

$$p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b \quad (5.21)$$

heißt **charakteristisches Polynom** der Differentialgleichung (5.19).

Die Lösungen von (5.20) sind bekanntlich

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{1}{2} \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right) \quad (5.22)$$

Es kommt nun auf das Vorzeichen der Diskriminante

$$D = a^2 - 4b$$

an. Wir erhalten die folgenden drei Fälle:

Fall 1: ($D > 0$). Es gilt also $a^2 > 4b$. In diesem Fall besitzt das Polynom p zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-a \pm \sqrt{D} \right)$. Also sind $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ Lösungen von (5.19).

Fall 2: ($D = 0$). Es gilt also $a^2 = 4b$. In diesem Fall besitzt das Polynom p die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$.

Fall 3: ($D < 0$). Es gilt also $a^2 < 4b$. In diesem Fall besitzt das Polynom p die beiden komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-a \pm i\sqrt{|D|} \right)$.

Auf dieser Grundlage liefert der folgende Satz jeweils ein reelles Fundamentalsystem.

Satz 5.20. Die Menge $\{u_1, u_2\}$ mit

Fall 1: ($D > 0$). $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$,

Fall 2: ($D = 0$). $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $u_2(t) = te^{\lambda_1 t}$,

Fall 3: ($D < 0$). $u_1(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t)$, $u_2(t) = e^{\mu t} \sin(\omega t)$, $\mu = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{|D|}$,

ist ein reelles Fundamentalsystem von (5.19).

Beweis. Aus der Formel von Liouville in Folgerung 5.16 erhalten wir mit $t_0 = 0$

$$\det W(t) = e^{-at} \det W(0). \quad (5.23)$$

zu Fall 1: Seien $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-a \pm \sqrt{D} \right)$. Offensichtlich sind u_1, u_2 Lösungen von (5.19). Weiter gilt

$$\det W(0) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 0} & e^{\lambda_2 0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{D} < 0.$$

Also sind u_1, u_2 wegen (5.14) linear unabhängig und $\{u_1, u_2\}$ ist ein reelles Fundamentalsystem von (5.19).

zu Fall 2: Seien $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $u_2(t) = te^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$. Offensichtlich ist u_1 eine Lösung von (5.19). Für u_2 gilt

$$u_2'(t) = \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}, \quad u_2''(t) = \lambda_1^2 t e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_2''(t) + au_2'(t) + bu_2(t) &= (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1 + a\lambda_1 t + a + bt) e^{\lambda_1 t} \\ &= \left(\underbrace{(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)}_{=p(\lambda_1)=0} t + \underbrace{(2\lambda_1 + a)}_{=p'(\lambda_1)=0} \right) e^{\lambda_1 t} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist u_2 ebenfalls eine Lösung von (5.19). Weiter gilt

$$\det W(0) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 0} & 0e^{\lambda_1 0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 0} & \lambda_1 0e^{\lambda_1 0} + e^{\lambda_1 0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Also sind u_1, u_2 wegen (5.14) linear unabhängig, und $\{u_1, u_2\}$ ist ein reelles Fundamentalsystem von (5.19).

zu Fall 3: Seien $u_1(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t)$, $u_2(t) = e^{\mu t} \sin(\omega t)$, $\mu = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{|D|}$. Für u_1 gilt:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \mu e^{\mu t} \cos(\omega t) - \omega e^{\mu t} \sin(\omega t), \\ u_1''(t) &= \mu^2 e^{\mu t} \cos(\omega t) - 2\mu\omega e^{\mu t} \sin(\omega t) - \omega^2 e^{\mu t} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $D < 0$ und aus der Definition von D , ω und μ

$$u_1''(t) + au_1'(t) + bu_1(t) = \left(\underbrace{(\mu^2 - \omega^2 + a\mu + b)}_{=0} \cos(\omega t) - \underbrace{(2\mu + a)\omega}_{=0} \sin(\omega t) \right) e^{\mu t} = 0,$$

denn

$$\begin{aligned} \mu^2 - \omega^2 + a\mu + b &= \operatorname{Re}((\mu + i\omega)^2 + a(\mu + i\omega) + b) = 0, \\ 2\mu + a &= -2\frac{a}{2} + a = 0. \end{aligned}$$

Somit ist u_1 eine Lösung von (5.19). Analog gilt für u_2

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= \mu e^{\mu t} \sin(\omega t) + \omega e^{\mu t} \cos(\omega t), \\ u_2''(t) &= \mu^2 e^{\mu t} \sin(\omega t) + 2\mu\omega e^{\mu t} \cos(\omega t) - \omega^2 e^{\mu t} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum mit der Definition von D , ω und μ

$$u_2''(t) + au_2'(t) + bu_2(t) = \left(\underbrace{(\mu^2 - \omega^2 + a\mu + b)}_{=0} \sin(\omega t) + \underbrace{(2\mu + a)\omega}_{=0} \cos(\omega t) \right) e^{\mu t} = 0.$$

Somit ist auch u_2 eine Lösung von (5.19). Weiter gilt

$$\det W(0) = \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & \omega \end{pmatrix} = \omega = \frac{1}{2}\sqrt{|D|} \neq 0.$$

Also sind u_1, u_2 wegen (5.14) linear unabhängig und $\{u_1, u_2\}$ ist ein reelles Fundamentalsystem von (5.19). \square

Bemerkung 5.21. Ein alternativer Beweis von Fall 3 mit komplexen Zahlen kann wie folgt geführt werden: Die Funktionen

$$\begin{aligned} z_1(t) &:= e^{\lambda_1 t} = e^{(\mu+i\omega)t} = e^{\mu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)), \\ z_2(t) &:= e^{\lambda_2 t} = e^{(\mu-i\omega)t} = e^{\mu t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)), \end{aligned}$$

lösen jeweils $Lz_j = 0$, $j = 1, 2$, da auch für komplexwertige Funktionen $z_j'(t) = \lambda_j e^{\lambda_j t}$, $z_j''(t) = \lambda_j^2 e^{\lambda_j t}$ gilt. Wegen der Linearität von L lösen damit auch

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \operatorname{Re}(z_1(t)) = \frac{1}{2} (z_1(t) + \overline{z_1(t)}) = \frac{1}{2} (z_1(t) + z_2(t)) = e^{\mu t} \cos(\omega t), \\ u_2(t) &= \operatorname{Im}(z_1(t)) = \frac{1}{2i} (z_1(t) - \overline{z_1(t)}) = \frac{1}{2i} (z_1(t) - z_2(t)) = e^{\mu t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

die Differentialgleichung (5.19).

Beispiel 5.22. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) - 7u'(t) + 12u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.24a)$$

$$u(0) = 3, \quad u'(0) = 11. \quad (5.24b)$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (5.24a) lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$$

und besitzt wegen (5.22) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3.$$

Wegen $D := a^2 - 4b = 49 - 48 = 1 > 0$ bildet $\{u_1, u_2\}$ mit

$$u_1(t) = e^{4t}, \quad u_2(t) = e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

nach Satz 5.20 (Fall 1) ein reelles Fundamentalsystem von (5.24a). Die allgemeine Lösung von (5.24a) ist daher von der Form

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = \alpha_1 e^{4t} + \alpha_2 e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

für beliebige $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Differenzieren und Auswerten bei $t = 0$ liefert wegen (5.24b)

$$\begin{aligned} 3 &= u(0) = \alpha_1 e^{4 \cdot 0} + \alpha_2 e^{3 \cdot 0} = \alpha_1 + \alpha_2, \\ 11 &= u'(0) = 4\alpha_1 e^{4 \cdot 0} + 3\alpha_2 e^{3 \cdot 0} = 4\alpha_1 + 3\alpha_2. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige Lösung $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 1$. Somit erhalten wir die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe (5.24)

$$u(t) = 2e^{4t} + e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 5.23. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.25a)$$

$$u(0) = 2, \quad u'(0) = 7. \quad (5.25b)$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (5.25a) lautet nach (5.21)

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

und besitzt wegen (5.22) die doppelte Nullstelle

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Wegen $D := a^2 - 4b = 16 - 16 = 0$ bildet $\{u_1, u_2\}$ mit

$$u_1(t) = e^{2t}, \quad u_2(t) = te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

nach Satz 5.20 (Fall 2) ein reelles Fundamentalsystem von (5.25a). Die allgemeine Lösung von (5.25a) ist daher von der Form

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 t e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

für beliebige $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Differenzieren und Auswerten bei $t = 0$ liefert

$$2 = u(0) = \alpha_1 e^{2 \cdot 0} + \alpha_2 0 e^{2 \cdot 0} = \alpha_1,$$

$$7 = u'(0) = 2\alpha_1 e^{2 \cdot 0} + 2\alpha_2 0 e^{2 \cdot 0} + \alpha_2 e^{2 \cdot 0} = 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige Lösung $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 3$. Somit erhalten wir die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe (5.25)

$$u(t) = 2e^{2t} + 3te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Abschließend betrachten wir das Anfangswertproblem für eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$[Lu](t) := u''(t) + au'(t) + bu(t) = r(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.26a)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (5.26b)$$

wobei $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und $r \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien. Es lohnt sich in diesem Fall die Formel Variation der Konstanten aus Satz 5.17 noch einmal speziell aufzuschreiben, da wir explizit ein Fundamentalsystem angeben können. Nehmen wir zunächst den Fall $D > 0$, also zweier reeller Eigenwerte an (siehe (5.22))

$$\lambda_1 = \mu + \omega, \quad \lambda_2 = \mu - \omega, \quad \mu = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{|D|}. \quad (5.27)$$

Aus der Formel (5.23) für die Wronski-Determinante und Satz 5.20 Fall 1 erhalten wir daher für die Lösung (5.16) von (5.26a), (5.26b) mit $u_0 = v_0 = 0$ die Darstellung

$$\bar{u}(t) = \int_0^t \frac{-e^{(\mu+\omega)t} e^{(\mu-\omega)s} + e^{(\mu-\omega)t} e^{(\mu+\omega)s}}{-2\omega e^{-as}} r(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{1}{2\omega} (e^{(\mu+\omega)(t-s)} - e^{(\mu-\omega)(t-s)}) r(s) ds \\
&= \int_0^t \frac{e^{\mu(t-s)}}{2\omega} (e^{\omega(t-s)} - e^{-\omega(t-s)}) r(s) ds.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $a + \mu = -\mu$ benutzt. Verwenden wir noch die Funktion \sinh (sprich "sinus hyperbolicus"),

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

so haben wir den ersten Teil der nächsten Folgerung bereits gezeigt.

Folgerung 5.24. Seien u_1, u_2 die Fundamentallösungen aus Satz 5.20 und seien μ, ω durch (5.27) definiert. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe (5.26a), (5.26b) gegeben durch

$$u(t) = \bar{u}(t) + \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.28)$$

Dabei ist

$$\bar{u}(t) = \int_0^t G(t-s)r(s)ds, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} e^{\mu x} \sinh(\omega x), & D > 0, \\ x e^{\mu x}, & D = 0, \\ \frac{1}{\omega} e^{\mu x} \sin(\omega x), & D < 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5.26a) mit homogenen Anfangsbedingungen (5.26b), und (α_1, α_2) die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Den Beweis der Formel (5.29) in den beiden Fällen $D = 0$ und $D < 0$ überlassen wir einer Übungsaufgabe. Den Fall $D < 0$ kann man am einfachsten in \mathbb{C} herleiten, indem man in der obigen Rechnung für \bar{u} jeweils $\mu \pm \omega$ durch $\mu \pm i\omega$ ersetzt und $\det W(s) = -2i\omega e^{-as}$ beachtet. Ebenso kann man (5.29) auch direkt ohne den Umweg über Satz 5.17 verifizieren, wenn man \bar{u} in die Differentialgleichung einsetzt und $G(0) = 0, G'(0) = 1$ benutzt. Schließlich bemerken wir, dass man auch die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.30) in den drei Fällen von Satz 5.20 explizit ausschreiben kann (Übungsaufgabe).

Beispiel 5.25. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 20, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.31a)$$

$$u(0) = 4, \quad u'(0) = 1. \quad (5.31b)$$

1. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (5.31a) lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10,$$

es besitzt wegen $D := a^2 - 4b = 4 - 40 = -36 < 0$ nach (5.22) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i.$$

Daher ist nach Satz 5.20 (Fall 3) ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$u_1(t) = e^{-t} \cos(3t), \quad u_2(t) = e^{-t} \sin(3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Die Formel (5.29) liefert

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \frac{20}{3} \int_0^t e^{-(t-s)} \sin(3(t-s)) ds = \int_0^t e^{-\tau} \sin(3\tau) d\tau \\ &= \frac{2}{3} (3 - 3e^{-t} \cos(3t) - e^{-t} \sin(3t)), \end{aligned}$$

wobei wir das Integral (zweimal partiell integrieren oder eine toolbox verwenden)

$$\int_0^t e^{-\tau} \sin(3\tau) d\tau = \frac{1}{10} (3 - 3e^{-t} \cos(3t) - e^{-t} \sin(3t))$$

verwendet haben.

3. Das lineare Gleichungssystem (5.30) lautet hier

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = \frac{5}{3}$. Zusammensetzen liefert dann die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(t) = \bar{u}(t) + 4u_1(t) + \frac{5}{3}u_2(t) = 2 + 2e^{-t} \cos(3t) + e^{-t} \sin(3t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.32)$$

Wir bemerken, dass es in diesem speziellen Beispiel auch einen einfacheren Lösungsweg gibt. Kann man nämlich eine spezielle (partikuläre) Lösung u_p der inhomogenen Gleichung (5.26a) raten, so hat die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe (5.26) die Form

$$u(t) = u_p(t) + \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.33)$$

wobei sich jetzt (β_1, β_2) aus der Anfangsbedingung (5.26b) ergeben

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - u_p(0) \\ v_0 - u_p'(0) \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

In unserem Beispiel (5.31) ist $u_p(t) = 2, t \in \mathbb{R}$ offensichtlich eine solche spezielle Lösung, das Gleichungssystem (5.34) lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und hat die Lösung $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1$. Eingesetzt in (5.33) ergibt sich wieder die Lösung (5.32).

5.4 Lineare Systeme 1. Ordnung

Wir wissen bereits, dass sich die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = 0 \quad (5.35)$$

mittels der Transformation

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$$

in das äquivalente (2-dimensionale) System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -a_1(t)v_2(t) - a_0(t)v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

transformieren lässt. Mit der Vektorschreibweise

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

können wir diese Gleichung kurz schreiben als

$$v'(t) = A(t)v(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Im allgemeinen Fall einer linearen Differentialgleichung k -ter Ordnung

$$u^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)u^{(j)}(t) = 0$$

erhält man analog mit der vektorwertigen Transformation

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

das äquivalente (k -dimensionale) System 1. Ordnung

$$v'(t) = A(t)v(t), \quad t \in J \quad (5.37)$$

mit der speziellen Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir (5.37) mit einer stetig von $t \in J$ abhängigen Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1k}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1}(t) & \cdots & A_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Satz 5.26 (Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Systeme 1. Ordnung). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $(t_0, v_0) \in J \times \mathbb{R}^k$ und sei $A \in C(J, \mathbb{R}^{k,k})$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$v'(t) = A(t)v(t), \quad t \in J, \quad (5.38a)$$

$$v(t_0) = v_0, \quad (5.38b)$$

genau eine **globale Lösung** $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus einer Anwendung von Satz 2.11 mit $n = k$ und

$$f : J \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad f(t, w) := A(t)w, \quad t \in J, \quad w \in \mathbb{R}^k.$$

Offensichtlich ist f stetig, und die Lipschitz-Beschränktheit folgt aus der Stetigkeit von A auf dem kompakten Intervall J

$$\|f(t, w) - f(t, z)\| = \|A(t)(w - z)\| \leq \|A(t)\| \|w - z\| \leq \sup_{t \in J} \|A(t)\| \|w - z\|.$$

□

Bemerkung 5.27. Satz 5.26 gilt sogar für beliebige Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$, also z. B. auch für

$$J = [t_0, \infty) \quad \text{und} \quad J = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Eine Begründung hierfür haben wir bereits zuvor in Bemerkung 5.12 genannt.

Satz 5.28. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C(J, \mathbb{R}^{k,k})$. Dann sind j Lösungen $v_1, \dots, v_j \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ von (5.38a) genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $v_1(t_0), \dots, v_j(t_0) \in \mathbb{R}^k$ (also die Anfangswerte) linear unabhängig sind.

Beweis. \Leftarrow : Seien $v_1(t_0), \dots, v_j(t_0) \in \mathbb{R}^k$ linear unabhängig. Weiter seien $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\sum_{i=1}^j \alpha_i v_i(t) = 0 \quad \forall t \in J.$$

Dann gilt insbesondere für $t = t_0$

$$\sum_{i=1}^j \alpha_i v_i(t_0) = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1(t_0), \dots, v_j(t_0)$ folgt dann aber

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_j = 0.$$

Somit sind $v_1, \dots, v_j \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ linear unabhängig.

\Rightarrow : Seien $v_1, \dots, v_j \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ linear unabhängig. Weiter seien $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\sum_{i=1}^j \alpha_i v_i(t_0) = 0.$$

Definiere

$$v(t) := \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i(t)$$

dann gilt $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ und

$$\begin{aligned} v'(t) &= \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i'(t) = \sum_{i=1}^j \alpha_i A(t) v_i(t) = A(t) \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i(t) = A(t) v(t), \\ v(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Da diese Anfangswertaufgabe einerseits die globale Lösung $v(t) = 0$ und andererseits nach Satz 5.26 genau eine globale Lösung besitzt, lautet die einzige Lösung $v(t) = 0$ für $t \in J$, d. h.

$$\sum_{i=1}^j \alpha_i v_i(t) = v(t) = 0 \quad \forall t \in J.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_j folgt dann aber

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_j = 0.$$

Somit sind $v_1(t_0), \dots, v_j(t_0) \in \mathbb{R}^k$ linear unabhängig. \square

Satz 5.29. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C(J, \mathbb{R}^{k,k})$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$v'(t) = A(t)v(t), \quad t \in J, \quad (5.39)$$

k linear unabhängige Lösungen $v_1, \dots, v_k \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$. Weiter gibt es zu jeder Lösung $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ von (5.39) Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i. \quad (5.40)$$

Beweis. Sei $v_i \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$, $i = 1, \dots, k$, die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} v_i'(t) &= A(t)v_i(t), \quad t \in J, \\ v_i(t_0) &= e_i, \end{aligned}$$

wobei $e_i \in \mathbb{R}^k$ den i -ten Einheitsvektor bezeichnet, d. h.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle.}$$

Da die Vektoren $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^k$ linear unabhängig sind, folgt aus Satz 5.28, dass die Lösungen $v_1, \dots, v_k \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ linear unabhängig sind. Damit haben wir zunächst gezeigt, dass es mindestens k linear unabhängige Lösungen gibt. Sei $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ eine weitere Lösung von (5.39). Für die Komponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ von $v(t_0)$ gilt

$$v(t_0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i(t_0).$$

Definieren wir nun

$$w := v - \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i,$$

so gilt $w \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ und w löst die Anfangswertaufgabe

$$w'(t) = v'(t) - \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i'(t) = A(t) \left[v(t) - \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i(t) \right] = A(t)w(t), \quad t \in J, \quad (5.41a)$$

$$w(t_0) = v(t_0) - \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i(t_0) = 0. \quad (5.41b)$$

Da die Anfangswertaufgabe (5.41) einerseits die Lösung $w(t) = 0$ und andererseits nach Satz 5.26 genau eine globale Lösung besitzt, lautet die einzige Lösung $w(t) = 0$ für $t \in J$, d. h.

$$v(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i(t) \quad \forall t \in J.$$

Somit lässt sich jede weitere Lösung v als Linearkombination von v_1, \dots, v_k schreiben. Daher ist k die genaue Anzahl linear unabhängiger Lösungen von (5.39). Insbesondere ist jede Lösung $v \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ von (5.39) von der Form (5.40) für geeignete $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. \square

Definition 5.30 (Fundamentalsystem, Fundamentalmatrix, Wronski-Determinante). Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(J, \mathbb{R}^{k,k})$ und $v_1, \dots, v_k \in C^1(J, \mathbb{R}^k)$ k linear unabhängige Lösungen von (5.39). Dann nennen wir die Menge

$$\{v_1, \dots, v_k\}$$

ein **Fundamentalsystem**, die Matrix

$$V(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t)) \in \mathbb{R}^{k,k}, \quad t \in J$$

eine **Fundamentalmatrix** und die Determinante

$$\det V(t), \quad t \in J$$

die zugehörige **Wronski-Determinante**.

Bemerkung 5.31. Beachte, dass sich (5.40) auch schreiben lässt als

$$v(t) = V(t)\alpha, \quad t \in J. \quad (5.42)$$

Schließlich lautet die **Variation der Konstanten Formel** für die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} v'(t) &= A(t)v(t) + r(t), \quad t \in J \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

wie folgt.

Satz 5.32 (Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe). Sei $V(t), t \in J$ eine Fundamentalmatrix von (5.39) und $r \in C(J, \mathbb{R}^k)$, $v_0 \in \mathbb{R}^k$. Dann ist die eindeutige Lösung von (5.43) gegeben durch

$$u(t) = V(t)V(t_0)^{-1}v_0 + \int_{t_0}^t V(t)V(s)^{-1}r(s)ds, \quad t \in J. \quad (5.44)$$

Beweis. Nach den Vorbemerkungen löst $V(t)V(t_0)^{-1}v_0$ die homogene Differentialgleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen ((5.43) mit $r = 0$). Es bleibt also zu zeigen, dass $\bar{u}(t) = V(t)c(t)$ mit $c(t) = \int_{t_0}^t V(s)^{-1}r(s)ds, t \in J$ die inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangsbedingungen ((5.43) mit $v_0 = 0$) löst. Offensichtlich ist $\bar{u}(t_0) = 0$. Aus der Produktregel und dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung folgt für $t \in J$

$$\begin{aligned} \bar{u}'(t) &= V'(t)c(t) + V(t)V(t)^{-1}r(t) \\ &= A(t)V(t)c(t) + r(t) = A(t)\bar{u}(t) + r(t). \end{aligned}$$

□

5.4.1 Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Im verbleibenden Teil dieses Abschnittes untersuchen wir (5.39) im Falle konstanter Koeffizienten, d. h.

$$v'(t) = Av(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.45)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{k,k}$. Wir zeigen, dass sich ein Fundamentalsystem von (5.45) mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen lässt.

Lemma 5.33. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ **Eigenwert** von $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ zum **Eigenvektor** $w \in \mathbb{R}^k$,

$$Aw = \lambda w, \quad w \neq 0. \quad (5.46)$$

Dann löst die Funktion

$$v(t) = e^{\lambda t}w, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.47)$$

die Differentialgleichung (5.45). Hat A nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit zugehörigen, linear unabhängigen Eigenvektoren $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^k$, so bilden die Funktionen

$$v_j(t) = e^{\lambda_j t}w_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.48)$$

ein reelles Fundamentalsystem von (5.45).

Beweis. Offensichtlich gilt $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ und

$$v'(t) = \lambda e^{\lambda t} w = e^{\lambda t} (\lambda w) = e^{\lambda t} A w = A e^{\lambda t} w = A v(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die weitere Behauptung folgt aus Satz 5.28, da $v_j(0) = w_j$, $j = 1, \dots, k$ linear unabhängig sind. \square

$A \in \mathbb{R}^{k,k}$ besitzt genau dann k linear unabhängige Eigenvektoren $w_j \in \mathbb{R}^k$ mit Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, wenn

$$A W = W \Lambda \quad \text{für } W := (w_1 \ \cdots \ w_k) \in \mathbb{R}^{k,k}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k}$$

gilt und die Matrix $W \in \mathbb{R}^{k,k}$ invertierbar ist. Nach Multiplikation mit W^{-1} ist obige Gleichung äquivalent zu $W^{-1} A W = \Lambda$, d. h. A ist **reell diagonalisierbar**.

Beispiel 5.34. Die Differentialgleichung (5.19) zweiter Ordnung lässt sich nach (5.36) mit der Transformation

$$v(t) := \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$$

als System erster Ordnung der Dimension 2 schreiben

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix} v(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Das charakteristische Polynom von A lautet

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + a) + b = \lambda^2 + a\lambda + b \quad (5.50)$$

und stimmt mit dem charakteristischen Polynom (5.21) der Differentialgleichung (5.19) überein. Seine Nullstellen (vgl. (5.22)),

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-a \pm \sqrt{D} \right), \quad D := a^2 - 4b$$

sind die Eigenwerte von A . Wir betrachten zunächst wieder den Fall $D > 0$.

Fall 1: ($D > 0$). Die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ sind reell und verschieden. Die zugehörigen Eigenvektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

sind daher linear unabhängig. Die Funktionen

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} w_1, \quad v_2(t) = e^{\lambda_2 t} w_2$$

bilden somit ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.49).

Beispiel 5.35. Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} v(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.51a)$$

$$v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (5.51b)$$

Das charakteristische Polynom der Matrix in (5.51a) lautet

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 \quad (5.52)$$

mit den Nullstellen, vgl. (5.22),

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2.$$

Die Eigenvektoren sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind, bilden die Funktionen

$$v_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nach Lemma 5.33 ein reelles Fundamentalsystem von (5.51a). Somit besitzt (5.51a) nach Satz 5.29 die allgemeine Lösung

$$v(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} w_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun $t = 0$, so erhält man aus der Anfangsbedingung (5.51b)

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

mit der Lösung $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = -1$. Somit ist die Lösung der Anfangswertaufgabe (5.51)

$$v(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} w_2 = 2e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{-2t} \\ 2e^{4t} + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Nun ist es nicht immer so, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ nur reelle Eigenwerte mit linear unabhängigen Eigenvektoren besitzt. Es können sowohl mehrfache als auch komplexe Eigenwerte auftreten. Um die Verbindung zu den Ergebnissen von Abschnitt 5.3.1 zu finden, setzen wir die Behandlung des zweidimensionalen Systems (5.49) für die Fälle $D = 0$ und $D < 0$ fort.

Fall 2: ($D = 0$). Wegen $a^2 = 4b$ besitzt das charakteristische Polynom (5.50) die doppelte reelle Nullstelle $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$. Offensichtlich ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

wegen

$$(A - \lambda I_2)w_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ -\frac{a^2}{4} & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \\ -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auch in diesem Fall ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Damit ist $v_1(t) = e^{\lambda t}w_1$ eine Lösung von (5.49). Allerdings ist w_1 (bis auf Vielfache) der einzige Vektor mit $(A - \lambda I)w_1 = 0$. Eine weitere Lösung bestimmen wir wie folgt:

Ansatz für weitere Lösungen. Definiere

$$v_2(t) := te^{\lambda t}w_1 + e^{\lambda t}w_2, \quad (5.53)$$

wobei $w_2 \in \mathbb{R}^2$ noch zu bestimmen ist. Einsetzen von v_2 in (5.49) liefert wegen $Aw_1 = \lambda w_1$

$$\begin{aligned} v_2'(t) - Av_2(t) &= e^{\lambda t}w_1 + t\lambda e^{\lambda t}w_1 + \lambda e^{\lambda t}w_2 - tAe^{\lambda t}w_1 - Ae^{\lambda t}w_2 \\ &= e^{\lambda t}(w_1 - (A - \lambda I_2)w_2) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt, falls w_2 die folgende Gleichung erfüllt

$$(A - \lambda I_2)w_2 = w_1. \quad (5.54)$$

In der Tat gilt für

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

offensichtlich

$$(A - \lambda I_2)w_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ -\frac{a^2}{4} & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} = w_1.$$

Somit sind v_1, v_2 Lösungen von (5.49) und zudem linear unabhängig, da

$$V(0) = (v_1(0), v_2(0)) = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Die Funktionen

$$v_1(t) = e^{\lambda t}w_1, \quad v_2(t) = te^{\lambda t}w_1 + e^{\lambda t}w_2$$

bilden also ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.49).

Man beachte, dass aus (5.54) und $w_1 \neq 0$ folgt

$$(A - \lambda I_2)^2 w_2 = 0, \quad (A - \lambda I_2)w_2 \neq 0. \quad (5.55)$$

Ein solcher Vektor w_2 heißt **Hauptvektor 2. Stufe**. Dieser Begriff wird wie folgt verallgemeinert.

Definition 5.36 (Hauptvektoren). Sei $A \in \mathbb{R}^{k,k}$. Ein Vektor $w_j \in \mathbb{R}^k$ ($1 \leq j \leq k$) mit

$$(A - \lambda I_k)^j w_j = 0, \quad (A - \lambda I_k)^{j-1} w_j \neq 0 \quad (5.56)$$

heißt **Hauptvektor j -ter Stufe** zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ein Hauptvektor 1. Stufe ist wegen

$$(A - \lambda I_k) w_1 = 0, \quad (A - \lambda I_k)^0 w_1 = w_1 \neq 0$$

gerade ein Eigenvektor.

Bemerkung 5.37. a) Im komplexen Fall $A \in \mathbb{C}^{k,k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ werden Hauptvektoren $w_j \in \mathbb{C}^k$ j -ter Stufe ebenso durch (5.56) wie in Definition 5.36 definiert.

b) Ist w_j ein Hauptvektor j -ter Stufe, so ist $w_{j-1} := (A - \lambda I_k)w_j$ für $j \geq 2$ ein Hauptvektor $(j-1)$ -ter Stufe, denn es gilt

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_k)^{j-1} w_{j-1} &= (A - \lambda I_k)^j w_j = 0, \\ (A - \lambda I_k)^{j-2} w_{j-1} &= (A - \lambda I_k)^{j-1} w_j \neq 0. \end{aligned}$$

Allgemein erhält man durch

$$w_{i-1} = (A - \lambda I_k) w_i, \quad i = j, \dots, 2 \quad (5.57)$$

eine **Kette von Hauptvektoren** w_j, w_{j-1}, \dots, w_1 , wobei w_i ein Hauptvektor i -ter Stufe ist.

Verallgemeinern wir unsere obige Rechnung, so erhalten wir den folgenden Satz, dessen Beweis wir aber nicht ausführen.

Satz 5.38. Sei $w_j \in \mathbb{R}^k$ ein Hauptvektor j -ter Stufe von $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei w_i , $i = j, \dots, 1$, die zugehörige Kette von Hauptvektoren gemäß (5.57). Dann sind die Funktionen

$$v_i(t) = \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} e^{\lambda t} w_\ell, \quad i = 1, \dots, j \quad (5.58)$$

linear unabhängige Lösungen von $v' = Av$.

Es bleibt der Fall komplexer Eigenwerte zu diskutieren. Wir betrachten wieder das zweidimensionale System (5.49).

Fall 3: ($D < 0$). Wegen $D < 0$ besitzt das charakteristische Polynom (5.50) zwei komplexe Nullstellen (vgl. Satz 5.20 Fall 3)

$$\lambda_1 = \mu + i\omega, \lambda_2 = \mu - i\omega, \quad \mu = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{|D|} \neq 0. \quad (5.59)$$

Sei nun allgemein $\lambda = \mu + i\omega$, $\omega \neq 0$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit zugehörigem Eigenvektor $w = y + iz \in \mathbb{C}^k$, wobei $y, z \in \mathbb{R}^k$. Wegen $\omega \neq 0$ sind die Vektoren y und z linear unabhängig. Wie in Lemma 5.33 (vgl. auch Bemerkung 5.21) erhalten wir jetzt eine komplexe Lösung von $v' = Av$ der Form

$$\begin{aligned} v(t) &:= e^{\lambda t} w = e^{\mu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) (y + iz) \\ &= e^{\mu t} (\cos(\omega t)y - \sin(\omega t)z) + i e^{\mu t} (\cos(\omega t)z + \sin(\omega t)y) \\ &= v_1(t) + i v_2(t). \end{aligned}$$

Die Rechnung dazu ist dieselbe wie im Beweis von Lemma 5.33. Insbesondere gilt

$$v_1'(t) + iv_2'(t) = v'(t) = Av(t) = A(v_1(t) + iv_2(t)) = Av_1(t) + iAv_2(t).$$

Setzen wir hierin Real- und Imaginärteil gleich, so folgt, dass v_1 und v_2 selbst Lösungen von $v' = Av$ sind. Wir erhalten das folgende Ergebnis.

Satz 5.39. Sei $\lambda = \mu + i\omega \in \mathbb{C}$ ($\mu, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$) ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ und $w = y + iz \in \mathbb{C}^k$ ($y, z \in \mathbb{R}^k$) ein zugehöriger Eigenvektor. Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(t) &= e^{\mu t} (\cos(\omega t)y - \sin(\omega t)z), \\ v_2(t) &= e^{\mu t} (\sin(\omega t)y + \cos(\omega t)z) \end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen von $v'(t) = Av(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Für das zweidimensionale System (5.49) ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = \mu + i\omega$ aus (5.59) gegeben durch

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu + i\omega \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}}_{=y} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}}_{=z}.$$

Nach Satz 5.39 ist also eine Fundamentalmatrix gegeben durch

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man sieht an dieser Darstellung sehr schön, wie die Lösungen in dem zweidimensionalen von y und z aufgespannten Raum mit der Geschwindigkeit ω rotieren und dabei exponentiell abklingen ($\mu < 0$) oder anwachsen ($\mu > 0$).

Schließlich ist es im k -dimensionalen Fall $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ möglich, dass es mehrfache komplexe Eigenwerte $\lambda = \mu + i\omega$ ($\mu, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$) gibt. In diesem Fall muss man wie im reellen Fall zum Eigenvektor $w = w_1$ eine (maximale) Kette von Hauptvektoren $w_j, \dots, w_1 \in \mathbb{C}^k$ finden. Reelle Lösungen bekommt man dann aus dem Realteil und aus dem Imaginärteil der in (5.58) angegebenen Lösungen.

In der Linearen Algebra zeigt man, dass der gesamte Raum \mathbb{C}^k eine Basis besitzt, die sich aus (maximalen) Hauptvektorketten

$$w_{j(p)}(p), \dots, w_1(p) \in \mathbb{C}^k, \quad p = 1, \dots, r$$

zu (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_p \in \mathbb{C}$ ($p = 1, \dots, r$) von A zusammensetzt (**Jordan Normalform**). Dabei gilt dann $\sum_{p=1}^r j(p) = k$. Man erhält auf diese Weise ein Fundamentalsystem zu $v' = Av$ der folgenden Form

$$v_{i,p}(t) = \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} e^{\lambda_p t} w_\ell(p), \quad i = 1, \dots, j(p), \quad p = 1, \dots, r.$$

Literaturverzeichnis

- [1] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verl., München, 2. aufl., [nachdr.] edition, 2007.
- [2] P. Deuffhard and F. Bornemann. *Numerische Mathematik*. De Gruyter Lehrbuch. De Gruyter, 2002.
- [3] L. Grüne. *Gewöhnliche Differentialgleichungen : Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, Wiesbaden, 2009.
- [4] M. Hanke-Bourgeois. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, Wiesbaden, 3., aktualisierte auflage edition, 2009.
- [5] J. C. Robinson. *An introduction to ordinary differential equations*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 4th print. edition, 2008.