1. Klausur

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/2017
Denny Otten
21.02.2017

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Vorbemerkungen

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Taschenrechner, Smartphones, etc. müssen **ausgeschaltet in der Tasche** bleiben.
- Dauer der Klausur: **120 Minuten**.
- Tragen Sie auf jedem Zettel **Ihren Namen**, **Ihre Matrikelnummer** und die jeweilige **Aufgabennummer** ein.
- Legen Sie einen **Lichtbildausweis** bereit.
- Verschaffen Sie sich vor der Bearbeitung der Aufgaben kurz einen Gesamtüberblick.
- Geben Sie bei der Lösung auch Ihnen offensichtlich erscheinende Begründungen bzw. Rechnungen an. Bearbeiten Sie aber nur die Aufgabenstellung.
- Die Aufgaben 1-5 ergeben zusammen 100 Punkte (20 Punkte je Aufgabe).

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$u'(t) = (t-2)(u(t)+1) \tag{1}$$

an den Stellen

$$\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in das auf der nächsten Seite enthaltene Koordinatensystem. (6 Punkte)

b) Markieren Sie im Koordinatensystem die Nullklinen der Differentialgleichung (1), d. h. die Bereiche, in denen die Steigung der Richtungspfeile 0 ist. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = (t-2)(u(t)+1), \quad u(2) = 3 \tag{2}$$

die Picard-Iterierten $v_0(t)$ und $v_1(t)$. (3 Punkte)

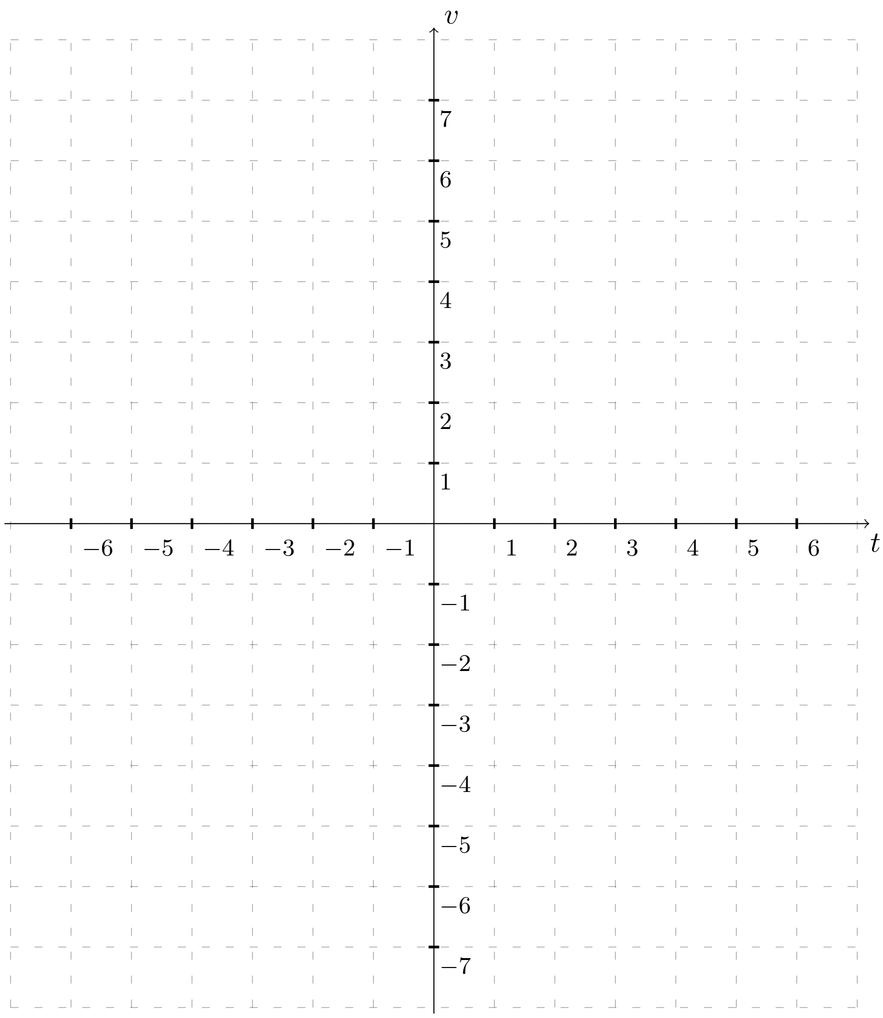
d) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe (2) die Euler-Iterierten u_1, u_2 mit dem

i) expliziten Euler-Verfahren

ii) impliziten Euler-Verfahren

zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$. (7 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:



Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2

a) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = 2t \exp\left(t^2\right) \exp(u(t)), \quad u(0) = 0$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -\frac{1}{t} u(t) + \exp(t), \quad u(1) = 2$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 0 \tag{3}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) an. (8 Punkte)

b) Geben Sie die Wronski-Matrix der Differentialgleichung (3) an und berechnen Sie die Wronski-Determinante. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 0, \quad u(0) = 5, \quad u'(0) = 7.$$

(4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\bar{u}(t) = -t^2$ die inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangsdaten

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 5t^2 + 8t - 2, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

löst. (3 Punkte)

e) Bestimmen Sie nun die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 5t^2 + 8t - 2, \quad u(0) = 5, \quad u'(0) = 7.$$

(2 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4

a) Transformieren Sie die skalare Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) = t(u'(t))^2 - \cos(u(t) - t), \quad u(1) = 2, \quad u'(1) = 3$$

auf ein 2-dimensionales System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung. (5 Punkte)

b) Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \frac{1}{2}tu(t)^2 - t^2u(t) + \frac{1}{2}t^3 + 1, \quad u(2) = 6 \tag{4}$$

mit Hilfe der Transformation $(s, v(s)) = T(t, u(t)) := (\frac{t}{2}, u(t) - t)$. (7 Punkte)

c) Geben Sie die zur Differentialgleichung

$$u'(t) = t\exp(u(t)), \quad u(1) = 2$$

äquivalente Integralgleichung an. (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Gleichgewichte der Differentialgleichung

$$u' = u^3 - 6u^2 + 8u \tag{5}$$

und überprüfen Sie für jedes Gleichgewicht von (5), ob es anziehend oder abstoßend ist. (6 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} v(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. (11 Punkte)

b) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [-3, 3], \quad u(1) = -2$$

mit

$$\text{i) } f(t,v) = \frac{t^4}{v^2+4}, \quad t, v \in \mathbb{R},$$
$$\text{ii) } f(t,v) = |v+2|^{\frac{1}{4}}\, t^3, \quad t, v \in \mathbb{R},$$
$$\text{iii) } f(t,v) = v^4\, |t-1|^{\frac{1}{2}}, \quad t, v \in \mathbb{R}.$$

Tragen Sie in die auf der nächsten Seite enthaltene Tabelle ein, ob die Voraussetzungen des

- globalen Satzes von Picard-Lindelöf,
- lokalen Satzes von Picard-Lindelöf,

jeweils für die Fälle i), ii) und iii) erfüllt (✓) oder nicht erfüllt (✗) sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, optimale Lipschitz-Konstanten bzw. lokale Existenzintervalle auszurechnen. (9 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

	globaler Satz von Picard-Lindelöf	lokaler Satz von Picard-Lindelöf
i)		
ii)		
iii)		

(✓: Voraussetzungen erfüllt, ✗: Voraussetzungen nicht erfüllt)