Lösungen zur 1. Klausur

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/2017
Denny Otten
21.02.2017

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Vorbemerkungen

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Taschenrechner, Smartphones, etc. müssen **ausgeschaltet in der Tasche** bleiben.
- Dauer der Klausur: **120 Minuten**.
- Tragen Sie auf jedem Zettel **Ihren Namen**, **Ihre Matrikelnummer** und die jeweilige **Aufgabennummer** ein.
- Legen Sie einen **Lichtbildausweis** bereit.
- Verschaffen Sie sich vor der Bearbeitung der Aufgaben kurz einen Gesamtüberblick.
- Geben Sie bei der Lösung auch Ihnen offensichtlich erscheinende Begründungen bzw. Rechnungen an. Bearbeiten Sie aber nur die Aufgabenstellung.
- Die Aufgaben 1-5 ergeben zusammen 100 Punkte (20 Punkte je Aufgabe).

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$u'(t) = (t-2)(u(t)+1) \tag{1}$$

an den Stellen

$$\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in das auf der nächsten Seite enthaltene Koordinatensystem. (6 Punkte)

b) Markieren Sie im Koordinatensystem die Nullklinen der Differentialgleichung (1), d. h. die Bereiche, in denen die Steigung der Richtungspfeile 0 ist. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = (t-2)(u(t)+1), \quad u(2) = 3 \tag{2}$$

die Picard-Iterierten $v_0(t)$ und $v_1(t)$. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe (2) die Euler-Iterierten u_1, u_2 mit dem

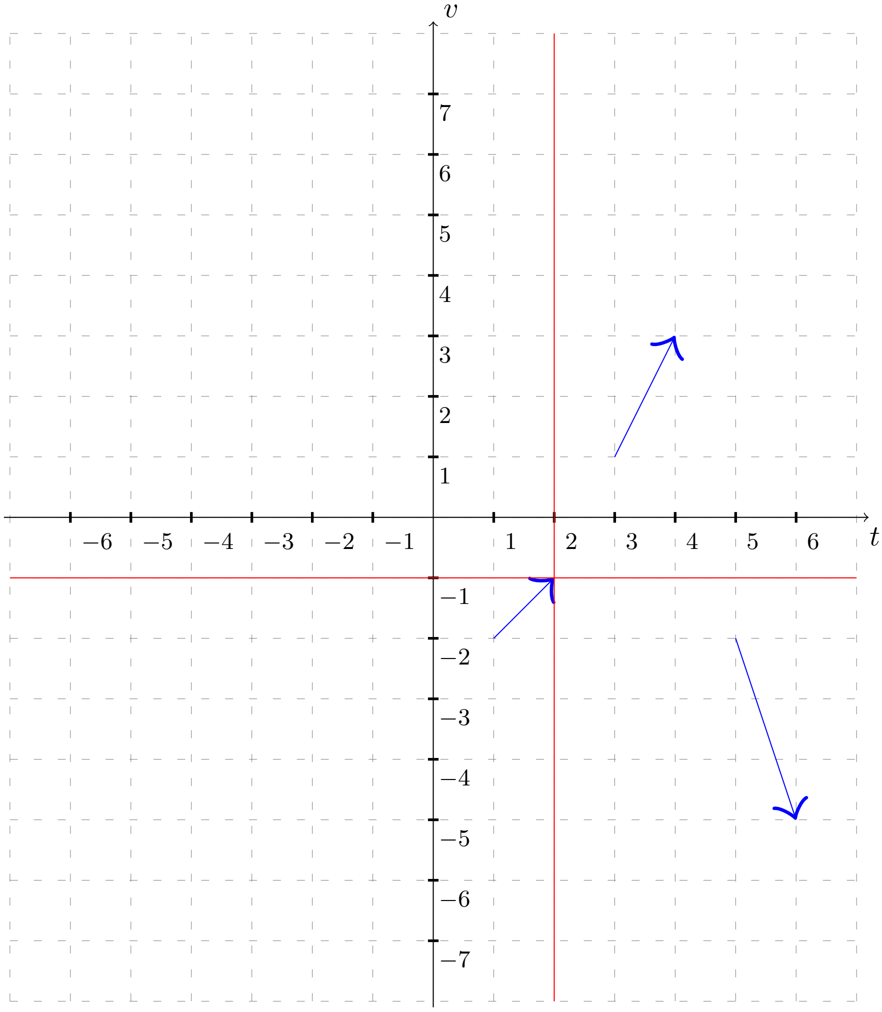
i) expliziten Euler-Verfahren

ii) impliziten Euler-Verfahren

zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$. (7 Punkte)

Lösung von Aufgabe 1

a)



Für $f(t, v) = (t - 2)(v + 1)$ erhalten wir (vgl. blaue Pfleile)

$$\begin{aligned} f(1,-2) &= 1, \qquad && (1,-2) \mapsto (2,-1) = (1,-2) + (1,1), \\ f(5,-2) &= -3, && (5,-2) \mapsto (6,-5) = (5,-2) + (1,-3), \\ f(3,1) &= 2, && (3,1) \mapsto (4,3) = (3,1) + (1,2). \end{aligned}$$

b) Es gilt $f(t, v) = 0$ genau dann, wenn $t = 2$ oder $v = -1$. Die Nullklinen sind daher (vgl. rote Linien)

$$\{(2, v) : v \in \mathbb{R}\}, \quad \{(t, -1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

c) Die Picard-Iterierten von (2) lauten

$$\begin{aligned} v_0(t) =& u_0 = 3, \\ v_1(t) =& u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v_0(s)) ds = 3 + \int_{2}^{t} (s-2)(3+1) ds = 3 + 4\left[\tfrac{1}{2}s^2 - 2s\right]_{s=2}^{t} \\ =& 3 + 2t^2 - 8t - 8 + 16 = 2t^2 - 8t + 11. \end{aligned}$$

d) Der Startwert u_0 und die Zeitpunkte t_j der Euler-Verfahren für (2) lauten (wegen $h = \frac{1}{2}$)

$$u_0 = 3, \quad t_j = 2 + jh = 2 + \frac{j}{2}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

i) Explizites Euler-Verfahren $u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j)$:

$$u_1 = 3 + \frac{1}{2}(2-2)(3+1) = 3,$$
$$u_2 = 3 + \frac{1}{2}\big(2 + \frac{1}{2} - 2\big)(3+1) = 4.$$

ii) Implizites Euler-Verfahren $u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1})$:

$$u_1 = 3 + \frac{1}{2}\big(2 + \frac{1}{2} - 2\big)(u_1+1) = \frac{13}{4} + \frac{1}{4}u_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}u_1 = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{13}{3},$$
$$u_2 = \frac{13}{3} + \frac{1}{2}(3-2)(u_2+1) = \frac{26+3}{6} + \frac{1}{2}u_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u_2 = \frac{29}{6} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{29}{3}.$$

Aufgabe 2

a) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = 2t \exp\left(t^2\right) \exp(u(t)), \quad u(0) = 0$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -\frac{1}{t} u(t) + \exp(t), \quad u(1) = 2$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

Lösung von Aufgabe 2

a) Definiere

$$g(t) = 2t\exp\left(t^2\right), \quad h(v) = \exp(v), \quad t_0 = 0, \quad u_0 = 0,$$

so gilt (nach Integration durch Substitution mit $\varphi(s) = s^2$)

$$\int_{t_0}^{t} g(s)ds = \int_0^t 2s\exp\left(s^2\right)ds = \int_0^{t^2} \exp(r)dr = \big[\exp(r)\big]_{r=0}^{t^2} = \exp\left(t^2\right) - 1,$$
$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}dv = \int_0^{u(t)} \exp(-v)dv = -\big[\exp(-v)\big]_{v=0}^{u(t)} = -\exp(-u(t)) + 1.$$

Aus der Trennung der Veränderlichen Formel (TdV) erhalten wir somit

$$-\exp(-u(t)) + 1 = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}dv \overset{TdV}{=} \int_{t_0}^{t} g(s)ds = \exp\left(t^2\right) - 1$$

und Auflösung nach $u(t)$ liefert uns

$$u(t) = -\ln\left(2 - \exp\left(t^2\right)\right).$$

Da der Logarithmus $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert ist, ist die Lösung u nur für t mit

$$2 - \exp\left(t^2\right) > 0 \quad \iff \quad \ln 2 > t^2 \quad \iff \quad t_- := -\sqrt{\ln 2} < t < \sqrt{\ln 2} =: t_+$$

definiert. Das maximale Existenzintervall lautet somit $(t_-, t_+) = (-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$.

b) Definiere

$$a(t) = -\frac{1}{t}, \quad r(t) = e^t, \quad t_0 = 1, \quad u_0 = 2,$$

so gilt (nach partieller Integration mit $f(s) = e^s$, $g(s) = s$)

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = -\int_1^t \frac{1}{\tau}d\tau = -\big[\ln|\tau|\big]_{\tau=1}^{t} = -\ln t + \ln 1 = \ln\left(\frac{1}{t}\right),$$
$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)}r(s)ds = \int_1^t se^s ds = \big[se^s\big]_{s=1}^{t} - \int_1^t e^s ds = \big[(s-1)e^s\big]_{s=1}^{t} = (t-1)e^t.$$

Aus der Variation der Konstanten Formel (VdK) erhalten wir somit

$$u(t) \overset{VdK}{=} e^{\alpha(t)}\left(u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)}r(s)ds\right) = \frac{1}{t}\left(2 + (t-1)e^t\right) = \frac{2}{t} + \frac{t-1}{t}e^t.$$

Da beide Terme bei $t = 0$ explodieren und $t_0 > 0$ ist, setzen wir $t_- := 0$ und $t_+ := \infty$. Das maximale Existenzintervall lautet somit $(t_-, t_+) = (0, \infty)$.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 0 \tag{3}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) an. (8 Punkte)

b) Geben Sie die Wronski-Matrix der Differentialgleichung (3) an und berechnen Sie die Wronski-Determinante. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 0, \quad u(0) = 5, \quad u'(0) = 7.$$

(4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\bar{u}(t) = -t^2$ die inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangsdaten

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 5t^2 + 8t - 2, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

löst. (3 Punkte)

e) Bestimmen Sie nun die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 4u'(t) - 5u(t) = 5t^2 + 8t - 2, \quad u(0) = 5, \quad u'(0) = 7.$$

(2 Punkte)

Lösung von Aufgabe 3

a) Das charakteristische Polynom von (3) lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

und besitzt (wegen $a = -4$, $b = -5$) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-(-4) \pm \sqrt{36}\right) = \tfrac{1}{2}(4 \pm 6) = 2 \pm 3, \qquad \text{also} \qquad \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1.$$

Wegen $D = a^2 - 4b = 36 > 0$ ist das reelle Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ von (3) durch

$$u_1(t) = e^{5t}, \quad u_2(t) = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von (3) lautet daher

$$u(t) = \alpha_1 e^{5t} + \alpha_2 e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Die Wronski-Matrix $W(t)$ und die Wronski-Determinante $\det W(t)$ von (3) lauten

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 5e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = -e^{5t-t} - 5e^{5t-t} = -6e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Das lineare Gleichungssystem

$$W(0)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Lösung} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

liefert die folgende Lösung der DGL (3) zu den Anfangsdaten $u(0) = 5$, $u'(0) = 7$

$$u(t) = 2e^{5t} + 3e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Für $\bar{u}(t) = -t^2$ gilt $\bar{u}'(t) = -2t$, $\bar{u}''(t) = -2$ und daher folgt

$$\bar{u}''(t) - 4\bar{u}'(t) - 5\bar{u}(t) = 5t^2 + 8t - 2, \quad \bar{u}(0) = -0^2 = 0, \quad \bar{u}'(0) = -2 \cdot 0 = 0.$$

e) Durch Addition der Lösungen aus c) und d) erhalten wir die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe

$$u(t) = \bar{u}(t) + \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = -t^2 + 2e^{5t} + 3e^{-t}.$$

Aufgabe 4

a) Transformieren Sie die skalare Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) = t(u'(t))^2 - \cos(u(t) - t), \quad u(1) = 2, \quad u'(1) = 3$$

auf ein 2-dimensionales System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung. (5 Punkte)

b) Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \frac{1}{2}tu(t)^2 - t^2u(t) + \frac{1}{2}t^3 + 1, \quad u(2) = 6 \tag{4}$$

mit Hilfe der Transformation $(s, v(s)) = T(t, u(t)) := (\frac{t}{2}, u(t) - t)$. (7 Punkte)

c) Geben Sie die zur Differentialgleichung

$$u'(t) = t\exp(u(t)), \quad u(1) = 2$$

äquivalente Integralgleichung an. (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Gleichgewichte der Differentialgleichung

$$u' = u^3 - 6u^2 + 8u \tag{5}$$

und überprüfen Sie für jedes Gleichgewicht von (5), ob es anziehend oder abstoßend ist. (6 Punkte)

Lösung von Aufgabe 4

a) Für $v_1(t) = u(t), v_2(t) = u'(t)$ erhalten wir die folgende Anfangswertaufgabe 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ t(u'(t))^2 - \cos(u(t) - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ t(v_2(t))^2 - \cos(v_1(t) - t) \end{pmatrix}$$

$$v(1) = \begin{pmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Die Transformation $(s, v(s)) = T(t, u(t)) := (\frac{t}{2}, u(t) - t)$ liefert die neuen Koordinaten

$$s = \frac{t}{2}, \quad v(s) = u(t) - t = u(2s) - 2s.$$

Durch Differentiation erhalten wir die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} v'(s) &= 2u'(2s) - 2 \\ &= 2su(2s)^2 - 2(2s)^2 u(2s) + (2s)^3 + 2 - 2 \\ &= 2s(v(s) + 2s)^2 - 8s^2(v(s) + 2s) + 8s^3 \\ &= 2sv(s)^2 + 8s^2 v(s) + 8s^3 - 8s^2 v(s) - 16s^3 + 8s^3 \\ &= 2sv(s)^2, \\ v(1) &= u(2) - 2 = 6 - 2 = 4, \quad s_0 = \frac{t_0}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

c) Wegen $f(t, v) = t\exp(v)$, $t_0 = 1$, $u_0 = 2$ lautet die äquivalente Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds = 2 + \int_1^t s\exp(u(s))ds.$$

d) Setze $f(u) = u^3 - 6u^2 + 8u$, so erhalten wir die Gleichgewichte u_1, u_2, u_3 durch

$$0 \stackrel{!}{=} f(u) = u(u^2 - 6u + 8) = u(u - 2)(u - 4) \quad \Longrightarrow \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 4.$$

Wegen $f'(u) = 3u^2 - 12u + 8$ gilt

$$f'(u_1) = 8 > 0, \quad f'(u_2) = -4 < 0, \quad f'(u_3) = 4 > 0.$$

Somit sind u_1, u_3 abstoßende Gleichgewichte und u_2 ein anziehendes Gleichgewicht.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} v(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. (11 Punkte)

b) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [-3, 3], \quad u(1) = -2$$

mit

$$\begin{aligned} \text{i) } f(t,v) &= \frac{t^4}{v^2+4}, \quad t, v \in \mathbb{R}, \\ \text{ii) } f(t,v) &= |v+2|^{\frac{1}{4}}\, t^3, \quad t, v \in \mathbb{R}, \\ \text{iii) } f(t,v) &= v^4\, |t-1|^{\frac{1}{2}}, \quad t, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tragen Sie in die auf der nächsten Seite enthaltene Tabelle ein, ob die Voraussetzungen des

- globalen Satzes von Picard-Lindelöf,
- lokalen Satzes von Picard-Lindelöf,

jeweils für die Fälle i), ii) und iii) erfüllt (✓) oder nicht erfüllt (✗) sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, optimale Lipschitz-Konstanten bzw. lokale Existenzintervalle auszurechnen. (9 Punkte)

Lösung von Aufgabe 5

a) Definiere $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, so lautet das charakteristische Polynom von (6)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\big(-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 8}\big) = \frac{1}{2}(6 \pm \sqrt{4}) = 3 \pm 1, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

Die Eigenvektoren w_j von A zum Eigenwert λ_j (für $j = 1,2$) ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} w_1 = (A - \lambda_1 I_2) w_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} w_2 = (A - \lambda_2 I_2) w_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von w_1, w_2 ist das Fundamentalsysten $\{v_1(t), v_2(t)\}$ von (6) durch

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(t) = e^{\lambda_2 t} w_2 = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von (6) lautet daher

$$v(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t) = \alpha_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

b)

	globaler Satz von Picard-Lindelöf	lokaler Satz von Picard-Lindelöf
i)	✓	✓
ii)	✗	✗
iii)	✗	✓

(✓: Voraussetzungen erfüllt, ✗: Voraussetzungen nicht erfüllt)

Sei $J = [-3,3] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $(t_0, u_0) = (1, -2) \in J \times \mathbb{R}$.

i) **globale Version:** • Es gilt $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und f ist Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}$ (bzgl. der 2. Variablen). Damit ist die globale Version des Satzes von Picard-Lindelöff (Satz 2.11) anwendbar. Die Lipschitz Beschränktheit von f folgt aus (vgl. Lemma 2.9) $D_v f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D_v f(t,v) = -\frac{2t^4 v}{(v^2+4)^2}$ und

$$|D_v f(t,v)| = 2|t|^4 \left| \frac{v}{(v^2+4)^2} \right| \leqslant 2 \cdot 3^4 \cdot \frac{2\cdot 3^2}{\sqrt{3}\cdot 16^2} = \frac{2^2 3^6}{\sqrt{3}16^2} = \frac{2916}{\sqrt{3}256} =: L \approx 6.5764.$$

• Alternativ kann man die Lipschitz Beschränktheit auf $J \times \mathbb{R}$ auch direkt zeigen

$$\left|\frac{t^4}{v^2+4} - \frac{t^4}{w^2+4}\right| = |t|^4 \left|\frac{v+w}{(v^2+4)(w^2+4)}\right| |v-w| \leqslant C|v-w| \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in J.$$

lokale Version: • Aus der Lipschitz Beschränktheit von f auf $J \times \mathbb{R}$ (bzgl. der 2. Variablen) folgt die Lipschitz Beschränktheit von f auf (der kleineren Menge) $J \times Q_\beta$ für jeden Quader Q_β mit $\beta > 0$. Damit ist die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöff (Satz 2.16) anwendbar.
• Die Lipschitz Beschränktheit of $J \times Q_\beta$ lässt sich (wie oben) alternativ auch direkt zeigen.

ii) **globale und lokale Version:** • Es gilt zwar $f \in C(J \times \overline{Q_\beta}, \mathbb{R})$ (sogar $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$), aber f ist für kein $\beta > 0$ Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q_\beta$ (bzgl. der 2. Variablen), und somit auch nicht Lipschitz-beschränkt auf $J \times \mathbb{R}$. Der Nachweis hierfür erfolgt aus (vgl. Lemma 2.9) $D_v f \in C(J \times Q_\beta, \mathbb{R})$,

$$D_v f(t,v) = \begin{cases} \frac{1}{4}|v+2|^{-\frac{3}{4}} t^3, & v \geqslant -2 \\ -\frac{1}{4}|v+2|^{-\frac{3}{4}} t^3, & v < -2 \end{cases}$$

und der Tatsache, dass $|D_v f(t,v)|$ unbeschränkt bei $v = -2$ ist. Damit sind weder die globale noch die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöff (Satz 2.11 bzw. Satz 2.16) anwendbar.

iii) **lokale Version:** • Es gilt $f \in C(J \times \overline{Q_\beta}, \mathbb{R})$ und f ist Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q_\beta$ (bzgl. der 2. Variablen) für jedes $\beta > 0$. Damit ist die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöff (Satz 2.16) anwendbar. Die Lipschitz Beschränktheit von f folgt aus (vgl. Lemma 2.9) $D_v f \in C(J \times \overline{Q_\beta}, \mathbb{R})$, $D_v f(t,v) = 4v^3|t-1|^{\frac{1}{2}}$ und

$$|D_v f(t,v)| = 4|v|^3|t-1|^{\frac{1}{2}} \leqslant 4(|v-u_0| + |u_0|)^3|t-1|^{\frac{1}{2}} \leqslant 8(\beta+2)^3 \quad \forall\, t \in J\, \forall\, t \in Q_\beta.$$

• Natürlich ließe sich die Lipschitz Beschränkthit auf $J \times Q_\beta$ auch hier wieder direkt zeigen.
globale Version: • Es gilt zwar $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, aber f ist (wie die obige Abschätzung zeigt) nicht auf ganz $J \times \mathbb{R}$ (bzgl. der 2. Variablen) Lipschitz-beschränkt, da $|D_v f|$ auf $J \times \mathbb{R}$ unbeschränkt ist. Damit ist die globale Version des Satzes von Picard-Lindelöff (Satz 2.11) anwendbar.