2. Klausur

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/2017
Denny Otten
28.03.2017

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Vorbemerkungen

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Taschenrechner, Smartphones, etc. müssen **ausgeschaltet in der Tasche** bleiben.
- Dauer der Klausur: **120 Minuten**.
- Tragen Sie auf jedem Zettel **Ihren Namen**, **Ihre Matrikelnummer** und die jeweilige **Aufgabennummer** ein.
- Legen Sie einen **Lichtbildausweis** bereit.
- Verschaffen Sie sich vor der Bearbeitung der Aufgaben kurz einen Gesamtüberblick.
- Geben Sie bei der Lösung auch Ihnen offensichtlich erscheinende Begründungen bzw. Rechnungen an. Bearbeiten Sie aber nur die Aufgabenstellung.
- Die Aufgaben 1-5 ergeben zusammen 100 Punkte (20 Punkte je Aufgabe).

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie das projizierte Richtungsfeld (Phasenbild) der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 - u_1 - 2, \\ u_2' &= u_1^2 - u_2 + 2 \end{aligned} \tag{1}$$

an den Stellen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

in das auf der nächsten Seite enthaltene Koordinatensystem. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichte der Differentialgleichung (1) und zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem. (4 Punkte)

c) Überprüfen Sie für jedes der in b) bestimmten Gleichgewichte von (1), ob es anziehend ist. (4 Punkte)

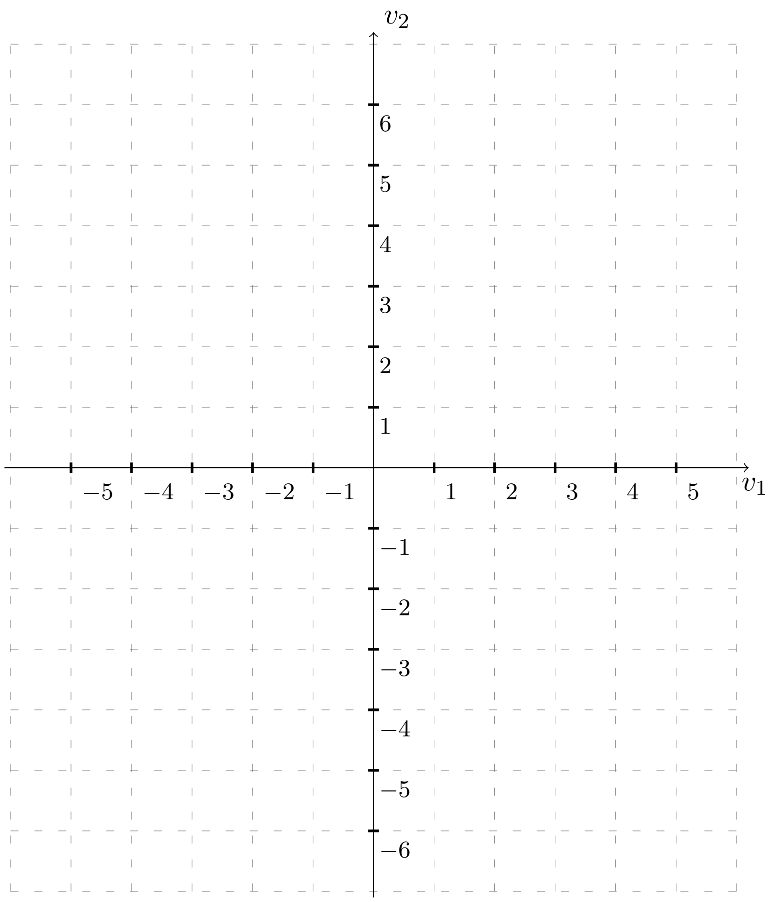
d) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix} u(t), \quad u(1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

die Picard-Iterierten $v_0(t)$ und $v_1(t)$. (3 Punkte)

e) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe (2) die Euler-Iterierten u_1, u_2 mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$. (3 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:



Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2

a) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \frac{-3}{(t+4)(t+7)}u(t), \quad u(0) = \frac{7}{4}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -\frac{3}{t}u(t) + \cos\left(t^4 - 1\right), \quad u(1) = \frac{1}{4}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0 \tag{3}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) an. (8 Punkte)

b) Geben Sie die Wronski-Matrix der Differentialgleichung (3) an und berechnen Sie die Wronski-Determinante. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0, \quad u(0) = -4, \quad u'(0) = -7.$$

(4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\bar{u}(t) = -t^3$ die inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangsdaten

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = -9t^3 + 18t^2 - 6t.$$

löst. (3 Punkt)

e) Bestimmen Sie nun die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = -9t^3 + 18t^2 - 6t, \quad u(0) = -4, \quad u'(0) = -7.$$

(2 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4

a) Transformieren Sie die skalare Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$t^2 u''(t) - t u'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) u(t) = 0, \quad u(2) = 3, \quad u'(2) = 1$$

auf ein 2-dimensionales System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung. (5 Punkte)

b) Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \left(5(t-1)^2 - \frac{1}{t}\right) u(t), \quad u(2) = 3 \tag{4}$$

mit Hilfe der Transformation $(s, v(s)) = T(t, u(t)) := (t-1, tu(t))$. (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ der Differentialgleichung

$$t^2 u''(t) - 3t u'(t) + 3u(t) = 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

mit Hilfe des Ansatzes $u(t) = t^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Weisen Sie insbesondere die lineare Unabhängigkeit ihrer Lösungen nach. (5 Punkte)

d) Geben Sie die Iterationsvorschrift der Methode von Heun für die folgende Anfangswertaufgabe an

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0. \tag{6}$$

(3 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} v(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{7}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. (11 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(v) = \frac{2v}{v^2 + 1}$$

auf $\mathbb{R}$ global Lipschitz-beschränkt ist. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(v) = v^4 \sin(v)$$

auf $\mathbb{R}$ lokal Lipschitz-beschränkt ist. Zeigen Sie weiter, dass f_2 auf $\mathbb{R}$ nicht global Lipschitz-beschränkt ist. (3 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(v) = |v - 2|^{\frac{1}{3}} v^2$$

in keiner Umgebung $Q_\beta(2) := [2 - \beta, 2 + \beta]$, $\beta > 0$, Lipschitz-beschränkt ist. (3 Punkte)