Lösungen zur 2. Klausur

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Denny Otten

28.03.2017

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Vorbemerkungen

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Taschenrechner, Smartphones, etc. müssen **ausgeschaltet in der Tasche** bleiben.
- Dauer der Klausur: **120 Minuten**.
- Tragen Sie auf jedem Zettel **Ihren Namen**, **Ihre Matrikelnummer** und die jeweilige **Aufgabennummer** ein.
- Legen Sie einen **Lichtbildausweis** bereit.
- Verschaffen Sie sich vor der Bearbeitung der Aufgaben kurz einen Gesamtüberblick.
- Geben Sie bei der Lösung auch Ihnen offensichtlich erscheinende Begründungen bzw. Rechnungen an. Bearbeiten Sie aber nur die Aufgabenstellung.
- Die Aufgaben 1-5 ergeben zusammen 100 Punkte (20 Punkte je Aufgabe).

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie das projizierte Richtungsfeld (Phasenbild) der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 - u_1 - 2, \\ u_2' &= u_1^2 - u_2 + 2 \end{aligned} \tag{1}$$

an den Stellen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

in das auf der nächsten Seite enthaltene Koordinatensystem. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichte der Differentialgleichung (1) und zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem. (4 Punkte)

c) Überprüfen Sie für jedes der in b) bestimmten Gleichgewichte von (1), ob es anziehend ist. (4 Punkte)

d) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix} u(t), \quad u(1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

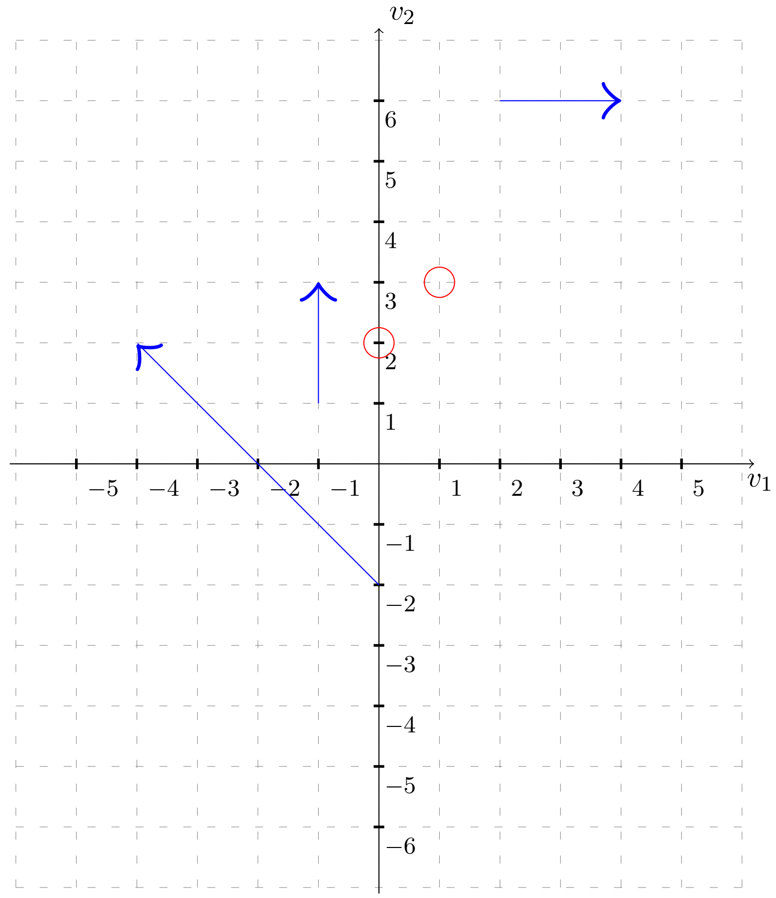
die Picard-Iterierten $v_0(t)$ und $v_1(t)$. (3 Punkte)

e) Berechnen Sie für die Anfangswertaufgabe (2) die Euler-Iterierten u_1, u_2 mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$. (3 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Lösung von Aufgabe 1

a)



Für $f\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_2-v_1-2\\v_1^2-v_2+2\end{pmatrix}$ erhalten wir (vgl. blaue Pfleile)

$$f\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2-0-2\\0^2-(-2)+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix},$$
$$f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-(-1)-2\\(-1)^2-1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},$$
$$f\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-2-2\\2^2-6+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}.$$

b) Die Gleichgewichte von (1) erhalten wir aus (vgl. rote Kreise)

$$0 \overset{!}{=} f\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_2-v_1-2\\v_1^2-v_2+2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

c) Differenzieren von f liefert

$$Df\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\2v_1 & -1\end{pmatrix},$$

Einsetzen der Gleichgewichte $\bar{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\bar{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)$ und Berechnung der Eigenwerte liefert

$$Df(\bar{v}_1) = \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \quad 0 \overset{!}{=} \det(\lambda I_2 - Df(\bar{v}_1)) = \det\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1\\0 & \lambda+1\end{pmatrix} = (\lambda+1)^2,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$$

und

$$Df(\bar{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad 0 \stackrel{!}{=} \det(\lambda I_2 - Df(\bar{v}_1)) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 - 2,$$
$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} < 0 < -1 + \sqrt{2} = \lambda_2.$$

Das Gleichgewicht $\bar{v}_1$ ist anziehend, da $\operatorname{Re}\sigma(Df(\bar{v}_1)) < 0$ gilt, d.h. $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von $Df(\bar{v}_1)$. Für $\bar{v}_2$ ist diese Eigenschaft nicht erfüllt.

d) Die Picard-Iterierten von (2) lauten für $f\left(t, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} v_0(t) =& u_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ v_1(t) =& u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v_0(s)) ds = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2s \end{pmatrix} ds \\ =& \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} s \\ s^2 \end{pmatrix} \right]_{s=1}^t = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-4 \\ t^2+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Der Startwert u_0, die Zeitpunkte t_j und die Nichtlinearität f des expliziten Euler-Verfahrens $u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j)$ für (2) lauten (wegen $h = 1$)

$$u_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t_j = t_0 + jh = 1 + j, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad f(t, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

Daraus ergeben sich die Euler-Iterierten

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + h \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t_0 \end{pmatrix} u_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= u_1 + h \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2

a) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \frac{-3}{(t+7)(t+4)} u(t), \quad u(0) = \frac{7}{4}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -\frac{3}{t} u(t) + \cos\left(t^4 - 1\right), \quad u(1) = \frac{1}{4}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an. (10 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Lösung von Aufgabe 2

a) Definiere

$$g(s) = \frac{-3}{(s+7)(s+4)}, \quad h(v) = v, \quad t_0 = 0, \quad u_0 = \frac{7}{4}.$$

Die Partialbruchzerlegung von $g(s)$

$$\frac{-3}{(s+7)(s+4)} \overset{!}{=} \frac{A}{s+7} + \frac{B}{s+4} = \frac{(A+B)s + (4A+7B)}{(s+7)(s+4)}$$

liefert die Gleichungen

$$A + B = 0, \qquad 4A + 7B = -3,$$

mit Lösung $A = 1$, $B = -1$. Somit gilt (Integration durch Substitution mit $\varphi(s) = s^2$)

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} g(s)ds &= \int_0^t \frac{-3}{(s+7)(s+4)}ds = \int_0^t \frac{1}{s+7}ds - \int_0^t \frac{1}{s+4}ds \\
&= \big[\ln|s+7| - \ln|s+4|\big]_{s=0}^{t} = \left[\ln\left|\frac{s+7}{s+4}\right|\right]_{s=0}^{t} = \ln\frac{t+7}{t+4} - \ln\frac{7}{4},
\end{aligned}$$

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}dv = \int_{\frac{7}{4}}^{u(t)} \frac{1}{v}dv = \big[\ln|v|\big]_{v=\frac{7}{4}}^{u(t)} = \ln u(t) - \ln\frac{7}{4}.$$

Aus der Trennung der Veränderlichen Formel (TdV) erhalten wir somit

$$\ln u(t) - \ln\frac{7}{4} = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}dv \overset{TdV}{=} \int_{t_0}^{t} g(s)ds = \ln\frac{t+7}{t+4} - \ln\frac{7}{4}.$$

Addition von $\ln\frac{7}{4}$ liefert $\ln u(t) = \ln\frac{t+7}{t+4}$ und Auflösung nach $u(t)$ schließlich

$$u(t) = \frac{t+7}{t+4}.$$

Das maximale Existenzintervall lautet in diesem Fall $(t_-, t_+) = (-4, \infty)$.

b) Definiere

$$a(t) = -\frac{3}{t}, \quad r(t) = \cos(t^4 - 1), \quad t_0 = 1, \quad u_0 = \frac{1}{4},$$

so gilt (nach log. Integration und Integration durch Substitution via $\varphi(s) = s^4 - 1$)

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = -3\int_1^t \frac{1}{\tau}d\tau = -3\big[\ln|\tau|\big]_{\tau=1}^{t} = -3\ln t + 3\ln 1 = -\ln t^3,$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)}r(s)ds &= \frac{1}{4}\int_1^t \underbrace{4s^3}_{\varphi'(s)} \cos(\underbrace{s^4 - 1}_{=\varphi(s)})ds = \frac{1}{4}\int_{\varphi(1)=0}^{\varphi(t)=t^4-1} \cos\tau d\tau \\
&= \frac{1}{4}\big[\sin\tau\big]_{\tau=0}^{t^4-1} = \frac{1}{4}\sin(t^4 - 1).
\end{aligned}$$

Aus der Variation der Konstanten Formel (VdK) erhalten wir somit

$$u(t) \overset{VdK}{=} e^{\alpha(t)}\left(u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)}r(s)ds\right) = \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin(t^4 - 1)\right) = \frac{1}{4t^3}(1 + \sin(t^4 - 1)).$$

Da beide Terme bei $t = 0$ explodieren und $t_0 > 0$ ist, setzen wir $t_- := 0$ und $t_+ := \infty$. Das maximale Existenzintervall lautet somit $(t_-, t_+) = (0, \infty)$.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0 \tag{3}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) an. (8 Punkte)

b) Geben Sie die Wronski-Matrix der Differentialgleichung (3) an und berechnen Sie die Wronski-Determinante. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0, \quad u(0) = -4, \quad u'(0) = -7.$$

(4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\bar{u}(t) = -t^3$ die inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangsdaten

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = -9t^3 + 18t^2 - 6t.$$

löst. (3 Punkt)

e) Bestimmen Sie nun die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = -9t^3 + 18t^2 - 6t, \quad u(0) = -4, \quad u'(0) = -7.$$

(2 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Lösung von Aufgabe 3

a) Das charakteristische Polynom von (3) lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

und besitzt (wegen $a = -6$, $b = 9$) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-(-6) \pm \sqrt{36-36}\right) = \tfrac{6}{2} = 3, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Wegen $D = a^2 - 4b = 36 - 36 = 0$ ist das reelle Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ von (3) durch die Funktionen

$$u_1(t) = e^{3t}, \quad u_2(t) = te^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von (3) lautet daher

$$u(t) = \alpha_1 e^{3t} + \alpha_2 te^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Die Wronski-Matrix $W(t)$ und die Wronski-Determinante $\det W(t)$ von (3) lauten

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = (1+3t)e^{6t} - 3te^{6t} = e^{6t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Das lineare Gleichungssystem

$$W(0)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Lösung} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

liefert die folgende Lösung der DGL (3) zu den Anfangsdaten $u(0) = -4$, $u'(0) = -7$

$$u(t) = -4e^{3t} + 5te^{3t} = (5t-4)e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Für $\bar{u}(t) = -t^3$ gilt $\bar{u}'(t) = -3t^2$, $\bar{u}''(t) = -6t$ und daher folgt

$$\bar{u}''(t) - 6\bar{u}'(t) + 9\bar{u}(t) = -9t^3 + 18t^2 - 6t, \quad \bar{u}(0) = -0^3 = 0, \quad \bar{u}'(0) = -3 \cdot 0^2 = 0.$$

e) Durch Addition der Lösungen aus c) und d) erhalten wir die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe

$$u(t) = \bar{u}(t) + \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = -t^3 + (5t-4)e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4

a) Transformieren Sie die skalare Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$t^2u''(t) - tu'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)u(t) = 0, \quad u(2) = 3, \quad u'(2) = 1$$

auf ein 2-dimensionales System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung. (5 Punkte)

b) Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \left(5(t-1)^2 - \frac{1}{t}\right)u(t), \quad u(2) = 3 \tag{4}$$

mit Hilfe der Transformation $(s, v(s)) = T(t, u(t)) := (t - 1, tu(t))$. (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ der Differentialgleichung

$$t^2u''(t) - 3tu'(t) + 3u(t) = 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

mit Hilfe des Ansatzes $u(t) = t^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Weisen Sie insbesondere die lineare Unabhängigkeit ihrer Lösungen nach. (5 Punkte)

d) Geben Sie die Iterationsvorschrift der Methode von Heun für die folgende Anfangswertaufgabe an

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0. \tag{6}$$

(3 Punkte)

Lösung von Aufgabe 4

a) Für $v_1(t) = u(t)$, $v_2(t) = u'(t)$ erhalten wir die folgende Anfangswertaufgabe 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ \frac{1}{t^2}\left(tv_2(t) - (t - \frac{1}{4})v_1(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 - \frac{1}{4t^2}) & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v(2) = \begin{pmatrix} v_1(2) \\ v_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(2) \\ u'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Transformation $(s, v(s)) = T(t, u(t)) := (t - 1, tu(t))$ liefert die neuen Koordinaten

$$s = t - 1, \quad v(s) = tu(t) = (s + 1)u(s + 1).$$

Durch Differentiation bzgl. s erhalten wir die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{d}{ds}\big((s+1)u(s+1)\big) \\ &= u(s+1) + (s+1)u'(s+1) \\ &= u(s+1) + (s+1)\left(5s^2 - \frac{1}{s+1}\right)u(s+1) \\ &= u(s+1) + 5(s+1)s^2u(s+1) - u(s+1) \\ &= 5s^2v(s), \\ v(1) &= 2u(2) = 2 \cdot 3 = 6, \quad s_0 = t_0 - 1 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

c) Einsetzen von $u(t) = t^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, in (5) liefert (wegen $u'(t) = \lambda t^{\lambda-1}$, $u''(t) = \lambda(\lambda-1)e^{\lambda-2}$)

$$0 = t^2u''(t) - 3tu'(t) + 3u(t) = (\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 3)t^\lambda = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)t^\lambda, \quad t > 0.$$

Der Koeffizient $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\big(-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}\big) = \tfrac{1}{2}(4 \pm 2) = 2 \pm 1, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Somit sind

$$u_1(t) = t, \quad u_2(t) = t^3$$

zwei Lösungen von (5). Da u_1, u_2 linear unabhängig sind

$$\det W(t) = \det \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{pmatrix} = 3t^3 - t^3 = 2t^3 \neq 0, \quad t > 0,$$

bildet $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem von (5).

d) Die Iterationsvorschrift der Methode von Heun für die Anfangswertaufgabe (6) lautet

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\Big(f(t_j, u_j) + f\big(t_j + h, u_j + hf(t_j, u_j)\big)\Big), \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} v(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{7}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. (11 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(v) = \frac{2v}{v^2 + 1}$$

auf $\mathbb{R}$ global Lipschitz-beschränkt ist. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(v) = v^4 \sin(v)$$

auf $\mathbb{R}$ lokal Lipschitz-beschränkt ist. Zeigen Sie weiter, dass f_2 auf $\mathbb{R}$ nicht global Lipschitz-beschränkt ist. (3 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(v) = |v - 2|^{\frac{1}{3}} v^2$$

in keiner Umgebung $Q_\beta(2) := [2 - \beta, 2 + \beta]$, $\beta > 0$, Lipschitz-beschränkt ist. (3 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Lösung von Aufgabe 5

a) Definiere $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, so lautet das charakteristische Polynom von (7)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\big(-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6}\big) = \frac{1}{2}\big(5 \pm 1\big), \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Die Eigenvektoren w_j von A zum Eigenwert λ_j (für $j = 1, 2$) ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} w_1 = (A - \lambda_1 I_2) w_1 \overset{!}{=} 0 \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w_2 = (A - \lambda_2 I_2) w_2 \overset{!}{=} 0 \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von w_1, w_2 ist das Fundamentalsysten $\{v_1(t), v_2(t)\}$ von (7) durch

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2(t) = e^{\lambda_2 t} w_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von (7) lautet daher

$$v(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t) = \alpha_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(v) = \frac{2v}{v^2+1}$ erfüllt $f_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Ableitung

$$D_v f_1(v) = \frac{2(v^2+1) - 2v(2v)}{(v^2+1)^2} = \frac{-2(v^2-1)}{(v^2+1)^2}, \ v \in \mathbb{R}.$$

Da die Ableitung $D_v f_1$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist (Dreiecksungleichung und max bei $v = 0$)

$$|D_v f_1(v)| = \frac{2|v^2-1|}{|v^2+1|^2} \leqslant \frac{2(v^2+1)}{(v^2+1)^2} = \frac{2}{v^2+1} \leqslant \frac{2}{0^2+1} = 2 =: L \ \forall\, v \in \mathbb{R}$$

folgt (Lemma 2.9), dass f_1 (global) Lipschitz beschränkt auf $\mathbb{R}$ ist (mit Lipschitz Konstante $L = 2$).

c) Die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(v) = v^4 \sin(v)$ erfüllt $f_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und ist folglich lokal Lipschitz-beschränkt auf $\mathbb{R}$ (Bemerkung 2.21). Da die Ableitung von f_2

$$D_v f_2(v) = 4v^3 \sin(v) + v^4 \cos(v), \ v \in \mathbb{R}$$

jedoch unbeschränkt auf $\mathbb{R}$ ist, ist f_2 nicht (global) Lipschitz-beschränkt auf $\mathbb{R}$ (Lemma 2.9).

d) Angenommen $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(v) = |v-2|^{\frac{1}{3}} v^2$ ist Lipschitz beschränkt in $Q_\beta(2) = [2-\beta, 2+\beta]$ für ein $\beta > 0$, d.h.

$$\exists\, L \geqslant 0 : \ |f_3(v) - f_3(w)| \leqslant L|v - w| \ \forall\, v, w \in Q_\beta(2). \tag{8}$$

Speziell für $w = 2 \in Q_\beta(2)$ gilt

$$|f_3(v)| = |f_3(v) - f_3(2)| \leqslant L|v-2| \;\forall\, v \in Q_\beta(2).$$

Definiere $v_n := 2 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $v_n \to 2$ für $n \to \infty$, gilt

$$\exists\, N = N(\beta) \in \mathbb{N}: \; v_n \in Q_\beta(2) \;\forall\, n \geqslant N.$$

Einsetzen von $v = v_n$

$$4n^{-\frac{1}{3}} \leqslant n^{-\frac{1}{3}} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = |f_3(v_n)| \leqslant L|v_n - 2| = \frac{L}{n} \;\forall\, n \geqslant N$$

liefert nach Multiplikation mit n

$$4n^{\frac{2}{3}} \leqslant L \;\forall\, n \geqslant N.$$

Hierbei gilt $n^{\frac{2}{3}} \to \infty$ für $n \to \infty$. Zu gegebenen $L > 0$ wählen wir nun n hinreichend groß (d.h. $n > \max\{\left(\frac{L}{4}\right)^{\frac{3}{2}}, N\}$) und erhalten $4n^{\frac{2}{3}} > L$ und somit einen Widerspruch zur Annahme in (8).