Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten

Aufgaben zur Klausurvorbereitung

25.01.2017

Abgabe: nicht vorgesehen.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.
Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.
Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.
Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.
Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 1 (Richtungsfeld).
Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$u' = 2u^2 - tu - t^2 - 2t$$

an den Stellen

$$\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

in ein (t, v)-Koordinatensystem der Größe $[-1, 4] \times [-15, 13]$.

Aufgabe 2 (Niveaulinien, Isoklinen).
Zeichnen Sie die Niveaulinien der Funktion

$$f(t, v) = v - t^2, \quad (t, v) \in [-1, 1] \times [-1, 2]$$

zum Niveau -1, 0 und 1.

Aufgabe 3 (Projiziertes Richtungsfeld).
Zeichnen Sie das projizierte Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 u_2, \\ u_2' &= u_2 - u_1 \end{aligned}$$

an den Stellen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Differential- vs. Integralgleichung).

(a) Bestimmen Sie die zur Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_1' &= 5u_1 + 3u_2, & u_1(0) &= 1, \\ u_2' &= -4u_1 - 2u_2, & u_2(0) &= -2 \end{aligned}$$

äquivalente Integralgleichung.

(b) Bestimmen Sie die zur Integralgleichung

$$u(t) = 5 + \int_1^t \Big(u(s)^2 + 2s\cos(u(s)) \Big) ds$$

äquivalente Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 5 (Lipschitz-Beschränktheit).
Erfüllen die folgenden Funktionen

(a) $f(t,v) = 2v\sin(t)$,

(b) $f(t,v) = v\sin(v)\cos(v)$,

(c) $f\left(t, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t - v_1 v_2 \end{pmatrix}$,

(d) $f\left(t, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_2 \\ \cos(t)v_1 - \sin(t)v_2 \end{pmatrix}$,

(e) $f(t,v) = \begin{cases} \sin v, & v < 0, \\ e^{-v^2} - 1, & v \geqslant 0, \end{cases}$

(f) $f(t,v) = \begin{cases} \sin v, & v < 0, \\ e^{-v^2}, & v \geqslant 0, \end{cases}$

(g) $f(t,v) = \begin{cases} \sin v, & v < 0, \\ ve^{-v^2}, & v \geqslant 0, \end{cases}$

die Lipschitz-Bedingung

$$\exists\, L \geqslant 0: \; \|f(t,v) - f(t,w)\| \leqslant L\,\|v - w\| \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}, v, w \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm bezeichnet? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst kleine Lipschitz-Konstante L an.

Aufgabe 6 (Picard-Iteration).
Berechnen Sie für die Anfangswertaufgaben

$$\text{(a) } u' = u^2, \quad u(1) = 1,$$
$$\text{(b) } u' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jeweils die ersten drei Picard-Iterierten $v_0(t), v_1(t), v_2(t)$.

Aufgabe 7 (Lokale Existenz- und Eindeutigkeit).
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = u\exp(u), \quad t \in J, \quad u(1) = 1$$

mit $J = [-2, 2]$ und $f(t,v) := v\exp(v)$. Zeigen Sie für

$$Q_\beta = \{v \in \mathbb{R} \mid |v - 1| \leqslant \beta\} = [1-\beta, 1+\beta], \quad \beta > 0,$$

dass die Funktion f Lipschitz-beschränkt auf $J \times Q_\beta$ ist und geben Sie eine Lipschitz-Konstante $L_\beta \geqslant 0$ an. Bestimmn Sie anschließend (mit dem lokalen Satz von Picard-Lindelöf) ein Intervall $I \subseteq J$, auf dem die Anfangswertaufgabe eine eindeutige lokale Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ besitzt.

Aufgabe 8 (Eindeutige Lösbarkeit).
Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = 2\sqrt{|u(t) + 1|}, \quad t \in [-1, 2],$$
$$u(0) = -1$$

zwar eine Lösung besitzt, aber nicht eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 9 (Globale Fortsetzung, Maximales Existenzintervall).
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u' = \frac{\exp(u)}{t}, \quad u(1) = 0, \quad t \geqslant 1$$

und geben Sie den Definitionsbereich der berechneten Lösung an.

Aufgabe 10 (Gleichgewichte, anziehend, abstoßend).

(a) Geben Sie alle Gleichgewichte der folgenden Differentialgleichungen an

$$\text{(i) } u' = (u^2+1)(u^2+2u-8),$$
$$\text{(ii) } u' = \begin{cases} \sin u, & u < 0, \\ u\cos(u), & u \geqslant 0, \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die anziehenden und abstoßenden Gleichgewichte der Differentialgleichung.

(b) Geben Sie alle Gleichgewichte der folgenden Differentialgleichung an

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(u_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie mit Hilfe der Eigenwertbedingung, welche dieser Gleichgewichte anziehend sind.

Aufgabe 11 (Trennung der Veränderlichen).
Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben

(a) $u' = (1+4t^3)u^2, \quad u(-1) = 1,$

(b) $u' = \dfrac{1}{(t^2-3t-10)\cos(7v+3)}, \quad u(6) = -\dfrac{3}{7},$

(c) $u' = \dfrac{t}{1+t^2}e^u, \quad u(0) = 0,$

(d) $u' = \dfrac{t\cos(t)}{v\sin(v^2)}, \quad u(\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Aufgabe 12 (Variation der Konstanten).
Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben

$$\text{(a) } u' = tu + r\exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \quad u(0) = u_0, \quad u_0, r \in \mathbb{R},$$
$$\text{(b) } u' = 3u + 27, \quad u(0) = 1,$$
$$\text{(c) } u' = \exp(t) - \frac{u}{t}, \quad u(1) = 1.$$

Aufgabe 13 (Transformation von Differentialgleichungen).
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$2u' = tu + \frac{1}{u}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \quad u(0) = 1.$$

Verwenden Sie dazu die Transformation $T(t,u) = (t, u^2)$.

Aufgabe 14 (Explizites Euler-Verfahren).
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = (u(t))^2 - t^2, \quad u(1) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten fünf Schritte u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 15 (Methode von Heun).
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = 1 - tu, \quad u(0) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Schritte u_1, u_2 mit der Methode von Heun zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 16 (Klassisches Runge-Kutta-Verfahren).
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 14. Berechnen Sie den ersten Schritt u_1 mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 17 (Implizites Euler-Verfahren).
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = \frac{u}{2t}, \quad u(1) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Schritte u_1, u_2 mit dem impliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 18 (Ordnungsreduktion, Transformation auf System 1. Ordnung).
Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$u'' = 27u' + 38u + 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 2$$

auf ein System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung.

Aufgabe 19 (Fundamentalsystem I). Geben Sie für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t) = 0, \quad a, b \in C([0, T], \mathbb{R}), \quad T > 0$$

zwei geeignete Anfangsbedingungen bei $t = 0$ an, so dass die Lösungen u_1, u_2 der zugehörigen Anfangswertaufgaben ein reelles Fundamentalsystem bilden.

Aufgabe 20 (Wronski-Matrix, Wronski-Determinante).

(a) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix der Differentialgleichung

$$u'' + 2u' - 8u = 0$$

und berechnen Sie die Wronski-Determinante.

(b) Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinate $d(t) = \det W(t)$ zu

$$u'' + au' + bu = r$$

die Differentialgleichung

$$d' + ad = 0$$

löst.

Aufgabe 21 (Fundamentalsystem II).
Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u'' - au' + bu = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Wie müssen a und b gewählt werden, damit $\{e^{2t}, te^{2t}\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung ist?

Aufgabe 22 (Globale und lokale Existenz- und Eindeutigkeit).
Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe 2. Ordnung

$$\begin{aligned} &u''(t) = 27u'(t) + 28u(t) + 1, \quad t \in J = [-a, a], \quad a > 0, \\ &u(0) = 1, \quad u'(0) = 2 \end{aligned}$$

für jedes $a > 0$ eine eindeutige globale Lösung $u \in C^2(J, \mathbb{R})$ besitzt.

Aufgabe 23 (Anfangswertaufgabe 2. Ordnung I).

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$
\begin{aligned}
&(1)\ u'' + 2u' - 8u = 0, \qquad && (4)\ u'' + 16u' + 64u = 0,\\
&(2)\ u'' - 3u' - 18u = 0, && (5)\ u'' + 2u' + 17u = 0,\\
&(3)\ u'' - 6u' + 9u = 0, && (6)\ u'' + 36u = 0.
\end{aligned}
$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben 2. Ordnung

$$
\begin{aligned}
&(1)\ u'' + 4u' + 5u = 0, && u(0) = 10, && u'(0) = 0,\\
&(2)\ u'' - 5u' + 6u = 0, && u(0) = 15, && u'(0) = 38,\\
&(3)\ -u'' - 4u = 0, && u(0) = 1, && u'(0) = 2,\\
&(4)\ u'' + 6u' + 9u = 0, && u(0) = 3, && u'(0) = 1,\\
&(5)\ u'' + u' - 2u = 0, && u(0) = 2, && u'(0) = -1,\\
&(6)\ 4u'' + 8u' + 8u = 0, && u(0) = 1, && u'(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24 (Anfangswertaufgabe 2. Ordnung II).
Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) = 3\sin(2t) - 5\cos(2t) + \frac{1}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung

$$u'' + 4u = 2$$

löst. Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'' + 4u = 2, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Aufgabe 25 (Anfangswertaufgabe 2. Ordnung III).
Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = e^{-t}, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -1.$$

Aufgabe 26 (Anfangswertaufgabe 2. Ordnung IV).
Gegeben seien die Funktionen

$$u_1(t) = \cos(2t), \quad u_2(t) = \sin(2t) \quad \text{und} \quad u_p(t) = -t\cos(2t).$$

Zeigen Sie, dass u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $u'' + 4u = 0$ bilden. Zeigen Sie weiter, dass u_p die folgende inhomogene Gleichung löst

$$u''(t) + 4u(t) = 4\sin(2t).$$

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 4u(t) = 4\sin(2t), \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Aufgabe 27 (System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung I).
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

indem Sie diese zunächst auf eine skalare Differentialgleichung 2. Ordnung transformieren.

Aufgabe 28 (Fundamentalsystem, Fundamentalmatrix, Wronski-Determinate)**.**
Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} v(t)$$

ein reelles Fundamentalsystem, geben Sie die Fundamentalmatrix an und berechnen Sie die Wronski-Determinante.

Aufgabe 29 (System von Differentialgleichungen 1. Ordnung)**.**
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} u_1' =& 3u_1 - u_2, \\ u_2' =& 4u_1 + 7u_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 30 (System von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung II)**.**
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_1' =& 2u_1 + u_2, \quad & u_1(0) = 2, \\ u_2' =& 3u_1 + 4u_2, \quad & u_2(0) = 2. \end{aligned}$$