Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017
Dozent: Dr. Denny Otten
Präsenzübungsblatt 2
31.10.2016-04.11.2016

Abgabe: nicht vorgesehen. Berbeitung während der Präsenzübung.
Präsenzübung 1: Do. 10-12 Uhr, V2-216, Andre Wilke.
Präsenzübung 2: Fr. 10-12 Uhr, V4-119, Philipp Külker.
Präsenzübung 3: Fr. 14-16 Uhr, V2-210, Markus Ebke.

Aufgabe 3 (Phasenbild, projiziertes Richtungsfeld).
a) Zeichnen Sie das Phasenbild der 2–dimensionalen autonomen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{u_2^2(t)}{u_1^2(t)+1}, \\ u_2'(t) &= \frac{u_1}{4}\big(u_2(t)-u_1(t)\big)^2 \end{aligned}$$

in $Q=[-2,2]\times[-2,2]$. Markieren Sie dazu zunächst die Bereiche, in denen senkrechte bzw. waagerechte Pfeile auftreten. Skizzieren Sie anschließend die von der Lösung u zum Anfangswert

$$u(0)=\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durchlaufene Kurve, ohne diese analytisch zu berechnen.

b) Zeichnen Sie das projizierte Richtungsfeld der 2–dimensionalen nicht-autonomen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= t-\frac{u_2^2}{2}, \\ u_2'(t) &= t-\frac{u_1^2}{2} \end{aligned}$$

jeweils zu den Zeitpunkten $t=0,1,2$ in $Q=[-2,2]\times[-2,2]$.

Aufgabe 4 (Lipschitz-Beschränktheit).
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\begin{aligned}
&\text{a) } f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}, \quad f(v)=\ln(1+v^2)\sin(v), \\
&\text{b) } f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}, \quad f(v)=|v|+\cos\big(\sin(v)\big), \\
&\text{c) } f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}, \quad f(v)=\begin{cases}\exp(v), & v\geq 0, \\ 1-v, & v<0,\end{cases} \\
&\text{d) } f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}^2, \quad f(v)=\begin{pmatrix} |v| \\ \exp(-2v)\end{pmatrix}, \\
&\text{e) } f\colon[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}, \quad f(v_1,v_2)=\cos(v_1)v_2^2, \\
&\text{f) } f\colon[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}^2, \quad f(v_1,v_2)=\begin{pmatrix} \dfrac{2v_2^2}{v_1^2+1} \\ \dfrac{\cos(v_1)}{\exp(v_2)}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lipschitz-beschränkt sind und bestimmen Sie jeweils eine (möglichst kleine) Lipschitz-Konstante bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.