

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten

Übungsblatt 1

19.10.2016



Abgabe: Mittwoch, 26.10.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.

Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.

Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.

Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.

Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 1 (Radiokarbonmethode).

Am 19. September 1991 wurde in den Ötztaler Alpen eine Gletschermumie („Ötzi“) gefunden. Zur Ermittlung des genauen Todeszeitraums haben die Wissenschaftler die Radiokarbonmethode (oder: ^{14}C -Methode) verwendet. Die Halbwertszeit des Kohlenstoffisotops ^{14}C beträgt ca. 5730 Jahre. Die Auswertung der Messergebnisse¹ ergab, dass die Mumie zum Messzeitpunkt im Jahre 1991 noch etwa 52% bis 54% der ursprünglichen Menge ^{14}C enthielt. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Daten den Zeitraum, in dem Ötzi verstorben ist, und geben Sie einen Bereich für sein heutiges Alter an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2 (Richtungsfeld).

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$u'(t) = (u(t) + 2)(t - 1)$$

in $\Omega = [0, 4] \times [-5, 1]$. Markieren Sie dazu zunächst die Bereiche, in denen waagerechte Pfeile auftreten (sog. Nullklinen). Zeichnen Sie in den übrigen Gebieten jeweils mindestens zwei Pfeile. Sollten Sie die Längen der Richtungspfeile für die Darstellung verändern, so geben Sie an, was Sie verändert haben. Skizzieren Sie die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $u(0) = 0$, ohne diese analytisch zu berechnen.

(6 Punkte)

Aufgabe 3 (Lösbarkeit und Eindeutigkeit).

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) = \frac{\exp(-5t^2)}{t+1} \cos(t) + t^3$ eine Lösung der folgenden AWA ist

$$u'(t) = - \left(10t + \frac{1}{t+1} \right) u(t) + 10t^4 + \frac{t^3}{t+1} + 3t^2 - \frac{\exp(-5t^2)}{t+1} \sin(t), \quad u(0) = 1.$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende AWA für jede Inhomogenität $g \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ und jeden Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung $u \in C^1((t_0, \infty), \mathbb{R}) \cap C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ besitzt

$$u'(t) = u(t) + g(t), \quad u(t_0) = u_0.$$

(6 Punkte)

¹G. Bonani, S. D. Ivy, I. Hajdas, T. R. Niklaus, and M. Suter. AMS ^{14}C age determinations of tissue, bone and grass samples from the Ötztal Ice man. *Radiocarbon*, **32**(2):247-250, 1994.