Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten
Übungsblatt 10
21.12.2016

Abgabe: Mittwoch, 11.01.2017, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.
Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.
Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.
Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.
Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 28 (Transformationen von Differentialgleichungen)**.**
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zunächst mit Hilfe der angegebenen Transformationen die transformierte Differentialgleichung aufstellen und lösen. Geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an und vergessen Sie nicht die Probe.

(a) $u' = 3u^2t^2 - 6ut^3 + 3t^4 + 1,$ $\qquad u(0) = 1,$
Transformation: $T(t,u) = (t, u-t)$

(b) $u' = \dfrac{t\,(u+t-1)^3}{t^2+1} - 1,$ $\qquad u(0) = 2,$
Transformation: $T(t,u) = (t, u+t-1)$

(c) $u' = \dfrac{1}{\exp(u)}\left(\exp(u) + 2t + 1\right),$ $\qquad u(0) = 0,$
Transformation: $T(t,u) = (t, \exp(u))$

(d) $u_1' = u_1(1+u_2),$ $\qquad u_1(0) = 2,$
$u_2' = 2u_1 - u_2\left(1-u_1\right),$ $\qquad u_2(0) = 1,$
Transformation: $T(t,(u_1,u_2)) = \left(t, \dfrac{1}{u_1}, u_1 - u_2\right)$

(6 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Aufgabe 29 (Transformation eines Differentialgleichungssystems und Gleichgewichte)**.**

(a) Bringen Sie die Differentialgleichung

$$u_1' = (2u_1 - 2)(7 - 6u_1 - 3u_2), \qquad u_2' = 2u_2(3 - 6u_2 - 2u_1)$$

mit Hilfe der Transformationen

(i) $T(t,u) = (\frac{t}{a}, u)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,
(ii) $T(t,u) = (t, bu)$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$,
(iii) $T(t,u) = (t, u-c)$, $c \in \mathbb{R}^n$,

in die Form des Systems

$$(1) \qquad u_1' = u_1(1 - u_1 - \frac{1}{2}u_2), \qquad u_2' = u_2(1 - u_2 - \frac{1}{3}u_1).$$

Beginnen Sie mit der Transformation (i) für $a = \frac{1}{2}$, d.h. $T(t,u) = (2t, u)$.

(b) Berechnen Sie alle Gleichgewichte des autonomen Systems (1). Untersuchen Sie, ob diese anziehend oder abstoßend sind (vgl. Aufgabe 20).

(6 Punkte)

Aufgabe 30 (Populationsdynamik).
Gegeben seien die Räuber-Beute-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 \left(\alpha - \beta u_2\right), \\ u_2' &= u_2 \left(\delta u_1 - \gamma\right), \end{aligned}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Finden sie geeignete a, b, c, so dass die Transformation

$$T(t,(u_1,u_2)) = \left(\frac{t}{c}, au_1, bu_2\right)$$

das System auf die Form

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \left(1 - v_2\right), \\ v_2' &= \nu v_2 \left(v_1 - 1\right) \end{aligned}$$

bringt. Geben Sie auch den Wert von ν (in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) an.

(6 Punkte)