Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017
Dozent: Dr. Denny Otten
Übungsblatt 11
11.01.2017

Abgabe: Mittwoch, 18.01.2017, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.
Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.
Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.
Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.
Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.
Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 31 (Explizites Euler-Verfahren)**.**
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -2u(t), \quad u(0) = \tfrac{1}{2}.$$

(a) Geben Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe an.

(b) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der Iterierten $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, die das explizite Euler-Verfahren für $h > 0$ liefert und beweisen Sie diese Darstellung durch vollständige Induktion über $j \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie für die Schrittweiten $h \in \{\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$ die Iterierten an und schildern Sie ihre Beobachtungen beim Vergleich mit der Lösung aus (a) für $t \to \infty$.

(6 Punkte)

Aufgabe 32 (Implizites Euler-Verfahren)**.**
Das **implizite Euler-Verfahren** wird definiert durch

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die zugehörige explizite Iterationsvorschrift erhält man durch Auflösen nach u_{j+1}. Führen Sie dieses Verfahren von Hand für das Anfangswertproblem

$$u' = \lambda u + \mu, \quad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ und unter der Voraussetzung $h\lambda \neq 1$ durch.

(a) Berechnen Sie mindestens u_1, u_2, u_3. Geben Sie eine explizite Darstellung für alle u_j, $j \geqslant 1$, an, die Sie mit vollständiger Induktion beweisen.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{j\to\infty} u_j$ unter der Voraussetzung $\lambda < 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 33 (Expl. Euler-Verfahren, Methode von Heun, klass. Runge-Kutta-Verfahren)**.**
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u - 2v \\ u - v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0,$$

die eindeutige globale Lösung von (1) ist.

(b) Schreiben Sie ein Programm in einer geeigneten Programmiersprache (z. B. Matlab, C/C++, Java, Maple, Python, ...), das eine Approximation der Lösung der Anfangswertaufgabe (1) mit dem **expliziten Euler-Verfahren**, der **Methode von Heun** und dem **klassischen Runge-Kutta-Verfahren** im Intervall $J = [0, 20]$ berechnet. Verwenden Sie dabei für die Schrittweite h die Werte $\frac{1}{2^j}$ mit $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und plotten Sie die zugehörigen Approximationen. Für die graphische Ausgabe können Sie GnuPlot oder interne Routinen der jeweiligen Sprache verwenden (z. B. den plot-Befehl in Matlab). Versenden Sie den gut kommentierten Programmcode per E-Mail an Ihren Tutor (mit kurzer Anleitung zur Ausführung des Codes). Geben Sie außerdem einen Ausdruck des Codes und des graphischen Outputs auf Papier ab.
Hinweis: Testen Sie das Programm zunächst an einer einfachen Anfangswertaufgabe, deren Lösung Sie kennen, z. B. an jener aus Aufgabe 31.

(6 Punkte)

Zusatz zu (b): Berechnen Sie für jedes Verfahren und jede Schrittweite den globalen Fehler (bzgl. der Maximumsnorm)

$$\max_{0 \leqslant t_j \leqslant 20} \max\{|u_j - u(t_j)|, |v_j - v(t_j)|\}.$$

Tragen Sie für jedes Verfahren den globalen Fehler gegen die Schrittweite in einem Diagramm auf. Verwenden Sie für beide Achsen eine logarithmische Skala. Wie sollte das Diagramm aussehen, wenn sich der Fehler wie Ch^p mit einer Konstanten C und einem $p \geqslant 1$ verhält.

(3 Bonuspunkte)

Betrachte eine Anfangswertaufgabe der Form

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in J,\ u(t_0) = u^0,$$

wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$, $u^0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Zum Lösen dieser AWA zur Schrittweite $h > 0$ an den Stützstellen $t_j = t_0 + jh$, $j \in \mathbb{Z}$, sei an die folgenden Verfahren erinnert:

a) Explizites Euler-Verfahren:

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j),\ j = 0, 1, \ldots,\ u_0 = u^0.$$

b) Methode von Heun:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\big(f(t_j, u_j) + f(t_j + h, u_j + hf(t_j, u_j))\big),\ j = 0, 1, \ldots,\ u_0 = u^0.$$

c) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}\big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\big),\ j = 0, 1, \ldots,\ u_0 = u^0,$$

wobei

$$\begin{aligned}
k_1 &:= f(t_j, u_j),\\
k_2 &:= f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1),\\
k_3 &:= f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_2),\\
k_4 &:= f(t_j + h, u_j + hk_3).
\end{aligned}$$