

Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten

Übungsblatt 2

26.10.2016



Abgabe: Mittwoch, 02.11.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.

Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.

Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.

Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.

Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 4 (Phasenbild, projiziertes Richtungsfeld).

Zeichnen Sie das Phasenbild der 2-dimensionalen autonomen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= u_1(t) \left(1 - u_1(t) - \frac{1}{2}u_2(t)\right), \\u_2'(t) &= u_2(t) \left(1 - u_2(t) - \frac{1}{3}u_1(t)\right),\end{aligned}$$

in $\Omega = [0, 3] \times [0, 2]$. Markieren Sie dazu zunächst die Bereiche, in denen senkrechte bzw. waagerechte Pfeile auftreten. Skizzieren Sie anschließend die von der Lösung u zum Anfangswert $(u_1(2), u_2(2))^T = (3, 2)^T$ durchlaufene Kurve, ohne diese analytisch zu berechnen.

(6 Punkte)

Aufgabe 5 (Wurf und freier Fall eines Balles).

Es bezeichne $r(t)$ die Höhe eines Balles über dem Boden, $v(t)$ die Geschwindigkeit des Balles und $a(t)$ die Beschleunigung des Balles jeweils zur Zeit t . Der Ball wird zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ s senkrecht mit der Geschwindigkeit $v_0 = 72\text{km/h}$ aus der Abwurfhöhe $r_0 = 1.5\text{m}$ nach oben geworfen. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes wirkt ausschließlich die Gravitationskraft K_G . Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt

$$r''(t) = a(t) = -\frac{K_G}{m} =: g,$$

wobei $g := \frac{K_G}{m} = 9.81\text{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung und $m = 0.2\text{kg}$ die Masse des Balles ist.

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Balles.
- Berechnen Sie die Höhe r des Balles.
- Welche maximale Höhe erreicht der Ball?
- Wie lange bleibt der Ball in der Luft?
- Mit welcher Geschwindigkeit fällt er auf den Boden?
- Mit welcher Geschwindigkeit muss der Ball aus der Abwurfhöhe $r_0 = 1.5\text{m}$ geworfen werden, damit er genau 5 Sekunden in der Luft bleibt?

(6 Punkte)

Zusatz:

- Erstellen Sie für die Lösung aus (a)-(b) ein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm und ein Zeit-Höhen-Diagramm.

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 6 (Anhalteweg eines Autos).

Es bezeichne $r(t)$ die Position des Autos auf trockener Fahrbahn, $v(t)$ die Geschwindigkeit des Autos und $a(t)$ die Beschleunigung des Autos jeweils zur Zeit t . Sei $t_1 := t_{SE} + t_R + t_{UA} = 1s$ die Summe der Zeiten $t_{SE} = 0.1s$ (Sehen & Erkennen), $t_R = 0.8s$ (Reaktion) und $t_{UA} = 0.1s$ (Umsetzen & Ansprechzeit), vgl. Abbildung 1. Weiter sei $t_2 := t_{SZ} = 0.2s$ die Schwellzeit. Dies liefert die (zeitabhängige) Bremskraft

$$K(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq t_1, \\ (t - t_1) \frac{K_{\max}}{t_2} & , t_1 \leq t \leq t_1 + t_2, \\ K_{\max} & , t \geq t_1 + t_2, \end{cases}$$

mit maximaler Bremskraft $K_{\max} = 6500N$. Das Auto habe ein Gesamtgewicht von $m = 1000kg$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 50km/h$ im Ort $r_0 = 0m$ zur Anfangszeit $t_0 = 0s$.

- (a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Autos.
- (b) Berechnen Sie den Anhalteweg r des Autos.
- (c) Erstellen Sie für die Lösung aus (a)-(b) ein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm und ein Zeit-Anhalteweg-Diagramm.

(6 Punkte)

Zusatz:

- (d) Berechnen Sie die Stoppzeit und die Länge des Anhalteweges. In 31 Meter Entfernung springt ein Reh auf die Fahrbahn. Kommt das Auto rechtzeitig zum Halten?
- (e) Ab 0.8 Promille verlängert sich die Reaktionszeit um 30 – 50%. Wann hält das Auto bei einer erhöhten Reaktionszeit von $t_R = 1.2s$? Und was passiert mit dem Reh?

(3+1 Bonuspunkte)

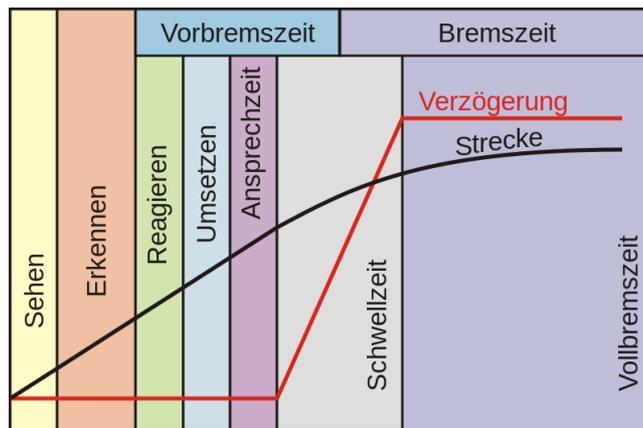


Abbildung 1: Bremsvorgang (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Bremsweg>)