Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten

Übungsblatt 3

02.11.2016

Abgabe: Mittwoch, 09.11.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.

Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.

Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.

Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.

Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 7 (Lipschitz-Beschränktheit).

Zeigen Sie für die gegebenen Mengen $J \subseteq \mathbb{R}$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, dass die folgenden Funktionen $f : J \times Q \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-beschränkt in $J \times Q$ (bezüglich der 2. Variablen) sind, d.h.

$$\exists\, L \geqslant 0 : \; \|f(t,v) - f(t,w)\| \leqslant L\,\|v-w\| \quad \forall\,(t,v),(t,w) \in J \times Q,$$

und bestimmen Sie jeweils eine möglichst kleine Lipschitz-Konstante L.

(a) $f(t,v) = tv^4$, $J = [-3,3]$, $Q = [-2,2]$,

(b) $f(t,v) = t^2 \sin(v)$, $J = [-2,2]$, $Q = [-6,6]$,

(c) $f(t,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{|t|}v_1^2 \\ \cos(t)v_1v_2 \end{pmatrix}$, $J = [-8,8]$, $Q = [-10,10] \times [-10,10]$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$,

Hierbei bezeichnet $\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, |v_2|\}$ die Maximumsnorm. Welche dieser Funktionen sind sogar global Lipschitz-beschränkt, also für $Q = \mathbb{R}^n$?

(6 Punkte)

Aufgabe 8 (Existenz- und Eindeutigkeitssätze).

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\Omega = J \times \mathbb{R}^n$. Untersuchen Sie jeweils, auf welche der folgenden Anfangswertaufgaben der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (Satz 2.11) anwendbar ist. In welchen Fällen lässt sich lediglich der Existenzsatz von Peano (Satz 2.4) anwenden?

(a) $u' = \cos(u)$, $u(0) = 0$,

(b) $u' = \sin(tu) - u^2$, $u(0) = 0$,

(c) $u' = 2\sqrt{|u-1|}$, $u(3) = 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 9 (Picard-Iteration).

Berechnen Sie für die angegebenen Anfangswertaufgaben jeweils die ersten drei Picard-Iterierten v_0, v_1, v_2 und zeichnen Sie diese Picard-Iterierten v_i $(i = 0,1,2)$ gemeinsam mit der angegebenen exakten Lösung u in ein Diagramm für $t \in J$.

(a) $u' = \frac{1}{2}u^2$, $u(0) = 1$, $u(t) = \frac{2}{2-t}$, $J = [-1,1]$,

(b) $u' = -2tu$, $u(0) = 2$, $u(t) = 2\exp(t^2)$, $J = [-2,2]$,

(c) $u' = t^2(u^2+1)$, $u(0) = 1$, $u(t) = \tan\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{\pi}{4}\right)$, $J = [-1,1]$.

(6 Punkte)

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, globale Version).
Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ und sei $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-beschränkt in $J \times \mathbb{R}^n$ (bzgl. der 2. Variablen) mit Lipschitz-Konstante $L \geqslant 0$.
Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= f(t, u(t)),\ t \in J, \\
u(t_0) &= u_0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

genau eine globale Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Weiter konvergiert die durch

$$
v_0(t) := u_0, \quad v_{k+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v_k(s))ds, \quad t \in J,\ k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{2}
$$

definierte Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $(C(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ gegen u, d.h.

$$
\|u - v_k\|_\infty := \sup_{t \in J} \|u(t) - v_k(t)\| \to 0 \text{ für } k \to \infty.
$$

Man nennt (2) die Picard-Iteration, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Picard-Folge und v_k die k-te Picard-Iterierte zum Anfangswertproblem (1).