Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten
Übungsblatt 4
09.11.2016

Abgabe: Mittwoch, 16.11.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.
Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.
Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.
Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.
Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 10 (Lipschitz-Beschränktheit).
(a) Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(1) Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(v)=\begin{cases}\sin(v) & ,\ v<0\\ 2v & ,\ v\geqslant 0\end{cases}$$

ist Lipschitz-beschränkt in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine geeignete Lipschitz-Konstante $L\geqslant 0$.

(2) Die Funktion

$$f:Q\to\mathbb{R},\quad f(v)=|v|^{\frac{1}{n}},\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2$$

ist in keinem Intervall $Q=[-a,a]$ mit $a>0$ Lipschitz-beschränkt.

(b) Seien $f_1,f_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ Lipschitz-beschränkt in $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Konstanten $L_1,L_2\geqslant 0$.

(1) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\begin{aligned}&g_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, && g_1(v):=Af_1(v)+Bf_2(v), && A,B\in\mathbb{R}^{n,n} && \text{(Linearkombination)}\\ &g_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, && g_2(v):=f_1(f_2(v)) && && \text{(Komposition)}\end{aligned}$$

Lipschitz-beschränkt in $\mathbb{R}^n$ sind und bestimmen Sie eine Lipschitz-Konstante.

(2) Geben Sie für $n=1$ zwei in $\mathbb{R}$ Lipschitz-beschränkte Funktionen f_1,f_2 an, so dass

$$g_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g_3(v):=f_1(v)f_2(v)\qquad\text{(Produkt)}$$

nicht Lipschitz-beschränkt in $\mathbb{R}$ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 11 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz).
Betrachten Sie für $m\in\mathbb{N}_0$ die Anfangswertaufgabe

$$u'(t)=t^m u(t),\quad u(0)=1.$$

(a) Besitzt die Anfangswertaufgabe für $\Omega=J\times\mathbb{R}$, $J=[-a,a]$ und $a>0$ eine eindeutige Lösung? (Hinweis: Überprüfen Sie die Voraussetzungen von Satz 2.11.)
(b) Geben Sie für $m\in\{0,1,2\}$ den kleinsten Index k an, ab dem die k-ten Picard-Iterierte v_k die Lösung u des Anfangswertproblems bis auf einen Fehler von 10^{-1} für alle $t\in J:=[-2,2]$ approximiert. (Hinweis: Verwenden Sie die a-priori Abschätzung aus Bemerkung 2.14.)
(6 Punkte)

Aufgabe 12 (Picard-Iteration).
Betrachten Sie für ein homogenes lineares System die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$u' = Au, \quad u(t_0) = u_0$$

mit einer konstanten Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

(a) Berechnen Sie die Picard-Iterierten v_0, v_1, v_2 und v_3.

(b) Geben Sie eine Formel für die k-te Picard-Iterierte v_k an und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Picard-Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ für $k \to \infty$.

(d) Zeigen Sie, dass der Grenzwert die Anfangswertaufgabe löst.

(e) Wie lautet damit die spezielle Lösung der Anfangswertaufgabe für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (t_0, u_0) = \left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)?$$

(6 Punkte)