Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017
Dozent: Dr. Denny Otten
Übungsblatt 5
16.11.2016

Abgabe: Mittwoch, 23.11.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.
Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.
Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.
Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.
Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 13 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz).
Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2,2})$ gegeben durch

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ \sin(t) & t^2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie mit dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (**Satz 2.11**), dass die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = A(t)u(t), \, t \in \mathbb{R}, \quad u(t_0) = u_0$$

für alle $u_0 \in \mathbb{R}^2$ genau eine globale Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 14 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz).
Überprüfen Sie, ob die folgenden Anfangswertaufgaben die Voraussetzungen des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf (**Satz 2.16**) erfüllen und somit eine eindeutige lokale Lösung besitzen:

$$\begin{aligned}
&(a)\ u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad u(1) = 0,\\
&(b)\ u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad u(0) = 1,\\
&(c)\ u'(t) = \sin(tu(t)), \quad u(0) = 0,\\
&(d)\ u'(t) = \frac{1}{t}\left(u(t)\right)^2, \quad u(1) = 0,\\
&(e)\ u'(t) = \sqrt{|u - 2t|}, \quad u(1) = 2,\\
&(f)\ u'(t) = \tan(u), \quad u(0) = 0.
\end{aligned}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 15 (Größtmögliches lokales Existenzintervall).
Bestimmen Sie das größtmögliche kompakte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, auf dem nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (**Satz 2.16**) die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \left(u(t) + t\right)^2, \quad u(0) = 0$$

eindeutig lösbar ist.
Hinweis: Hier sind sowohl α als auch β aus Satz 2.16 unbekannt!

(6 Punkte)