Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten
Übungsblatt 6
23.11.2016

Abgabe: Mittwoch, 30.11.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.

Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.

Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.

Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.

Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 16 (Die Picard-Iteration in einem kritischen Fall)**.**
Untersuchen Sie die durch die Picard-Iteration erzeugte Folge $v_k \in C([0,1],\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ für die Anfangswertaufgabe $u' = \sqrt{|u|}$ in $[0,1]$, $u(0) = 0$, wenn man als Startfunktion nicht die Nullfunktion sondern $v_0(t) = t, t \in [0,1]$ wählt. Zeigen Sie

(a) $v_k(t) = c_k t^{q_k}, t \in [0,1]$, wobei $q_k = 2 - 2^{-k}$ und $c_k > 0$ eine geeignete Rekursion erfüllt.

(b) Die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fällt monoton und ist konvergent (welcher Grenzwert ?).

(c) Die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen eine Lösung der Anfangswertaufgabe (welche ?).

(6 Punkte)

Aufgabe 17 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz II)**.**
Überprüfen Sie, ob die folgenden Anfangswertaufgaben die Voraussetzungen des globalen bzw. des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf (**Satz 2.11** bzw. **Satz 2.16**) erfüllen:

$$\text{(a)}\ u'(t) = |1-u(t)|^{\frac{3}{2}}, \quad u(1) = 1,$$

$$\text{(b)}\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{u_3}{u_2} \\ \cos(tu_3) + \sin(u_1) \\ 2u_1u_2\sqrt{u_3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)}\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \sin(u_1)\cos(u_2) \\ \exp(t)u_3 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 18 (Maximales Existenzintervall)**.**
Untersuchen Sie die maximalen Existenzintervalle der Lösungen zu

$$\text{(a)}\ u' = u^3, \quad u(0) = u_0,$$
$$\text{(b)}\ u' = -u^3, \quad u(0) = u_0,$$

in Abhängigkeit von u_0.
Hinweis: Für $u_0 \neq 0$ sind die Lösungen von der Form

$$u(t) = \pm(c_1 + c_2 t)^{-\frac{1}{2}},$$

wobei das Vorzeichen und die Konstanten c_1, c_2 zu bestimmen sind.

(6 Punkte)