Vertiefung NWI: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/2017

Dozent: Dr. Denny Otten
Übungsblatt 7
30.11.2016

Abgabe: Mittwoch, 07.12.2016, bis 14:00 Uhr in das Postfach des/der Tutors/in.

Übung 1: Mo. 16-18 Uhr, V5-148, Philipp Külker, philipp.kuelker@uni-bielefeld.de, Postfach 194 in V3-128.

Übung 2: Mi. 18-20 Uhr, V5-148, Simon Dieckmann, simon.dieckmann@uni-bielefeld.de, Postfach 28 in V3-128.

Übung 3: Do. 08-10 Uhr, V5-148, Andre Wilke, awilke@math.uni-bielefeld.de, Postfach 179 in V3-128.

Übung 4: Do. 08-10 Uhr, T2-220, Markus Ebke, markus.ebke@uni-bielefeld.de, Postfach 177 in V3-128.

Übung 5: Fr. 12-14 Uhr, V4-119, Carolin Herrmann, carolin.herrmann@uni-bielefeld.de, Postfach 187 in V3-128.

Aufgabe 19 (Anziehende und abstoßende Gleichgewichte).

Berechnen Sie die Gleichgewichte der folgenden Differentialgleichungen. Testen Sie, ob diese Gleichgewichte anziehend oder abstoßend sind. Erstellen Sie das jeweilige Phasenbild in einem geeigneten Bereich.

(a) $u' = 3u^2 - 3u^4$
(b) $u' = (u+1)(2-u-u^2)$
(c) $u' = (u^2-1)\sin(u)$

(6 Punkte)

Aufgabe 20 (Gleichgewichte höherdimensionaler autonomer Differentialgleichungen).

Das in der Vorlesung vorgestellte Gleichgewichtskonzept kann auch auf höherdimensionale autonome Differentialgleichungen übertragen werden. Ein Punkt $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Gleichgewicht** (oder: **stationärer Punkt**) der autonomen Differentialgleichung

$$u'(t) = f(u), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

falls $f(\bar{u}) = 0$ gilt. Ein Gleichgewicht $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ von (1) heißt **anziehend**, falls alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ der Jacobi-Matrix $Df(\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ links von der imaginären Achse liegen, d. h. $\operatorname{Re}\lambda < 0$.
Beachte: In einer Dimension entspricht dies der bekannten Bedingung $f'(\bar{u}) < 0$.
Berechnen Sie alle Gleichgewichte der zwei-dimensionalen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= -u_2 - \frac{1}{2}\sin(u_1), \end{aligned}$$

und testen Sie, ob diese Gleichgewichte anziehend sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 21 (Gleichgewichte, lokale Existenz und Eindeutigkeit, Fortsetzung).

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u' &= \sin(u)\exp(u), \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

mit Anfangsdaten $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Gleichgewichte der Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe zunächst lokal eindeutig lösbar ist. Beweisen Sie anschließend, dass die Lösung für alle Zeiten existiert.

(6 Punkte)