Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 1

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 22.04.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 1 (Typeneinteilung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung)**.**

(a) Zeigen Sie, dass es zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ eine invertierbare Matrix $X \in \mathbb{R}^{m,m}$ gibt mit

$$X^T AX = \operatorname{diag}(-1, \ldots, -1,\ 0, \ldots, 0,\ 1, \ldots, 1),$$

wobei $-1, 0, 1$ so oft auf der Diagonalen vorkommt, wie die Anzahl der negativen, Null–, positiven Eigenwerte von A ist. Man nennt $X^T AX$ eine **Trägheitstransformation** von A.

(b) Betrachte eine Differentialgleichung

$$Lu := au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y),\ (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

mit $a, b, c \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und führe eine Koordinatentransformation

$$u(x, y) = v(\rho(x, y)),\ (\xi, \eta) = \rho(x, y)$$

mit einem C^2-Diffeomorphismus $\rho : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ durch. Welcher Differentialgleichung genügt v in Ω', wenn u eine Lösung von (1) ist?

Bestimmen Sie den Hauptteil

$$L'v = a'v_{\xi\xi} + b'v_{\xi\eta} + c'v_{\eta\eta}$$

dieser Differentialgleichung und zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} a' & \frac{1}{2}\, b' \\ \frac{1}{2}\, b' & c' \end{pmatrix}$ durch eine Trägheitstransformation aus $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}\, b \\ \frac{1}{2}\, b & c \end{pmatrix}$ hervorgeht.

Zeigen Sie, dass die transformierte Differentialgleichung am Punkt $(\xi, \eta) = \rho(x, y)$ von demselben Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) ist wie die Gleichung (1) bei (x, y).

(c) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung (1) im Fall von Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ so transformieren lässt, dass der Hauptteil die Form

$$\begin{aligned} \pm(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) \qquad & \text{(elliptischer Fall)} \\ -v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} \qquad & \text{(hyperbolischer Fall)} \\ \epsilon v_{\xi\xi},\ \epsilon \in \{-1, 0, 1\} \qquad & \text{(parabolischer Fall)} \end{aligned}$$

erhält.

(12 Punkte)