Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 29.04.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 2 (Montonie und a-priori Abschätzung elliptischer Randwertaufgaben)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und seien $p, q, r \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit $r \geq 0$ in Ω gegeben. Sei weiter $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ eine in Ω zweimal stetig differenzierbare Lösung der linearen elliptischen Randwertaufgabe

$$-\Delta u + pu_x + qu_y + ru = s \quad \text{in } \Omega, \qquad u = \gamma \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1}$$

mit $s \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $\gamma \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ (u heißt dann **klassische Lösung** von (1)).

(i) Aus $s > 0$ in $\Omega, \gamma > 0$ in $\partial\Omega$ folgt $u > 0$ in $\overline{\Omega}$ (**inverse Monotonie**).

(ii) Es gibt eine von s, u und γ unabhängige Konstante $C > 0$ mit

$$\|u\|_\infty \leq C(\|s\|_\infty + \|\gamma\|_\infty).$$

Insbesondere hat (1) höchstens eine Lösung.

Hinweise:

1. Man analysiere die Situation am Minimum von u.
2. Wende (i) auf $w(x, y) = b(1 - ce^{-ax}) \pm u(x, y)$ mit geeigneten Konstanten $a, b, c > 0$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 3 (Parabolische Anfangsrandwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen)**.**
Verallgemeinern Sie die inverse Monotonie für parabolische Anfangsrandwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + pu_x + qu + f \quad &\text{in} \quad \Omega = (0, \ell) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \ 0 < x < \ell& \\ \alpha_0 u(0, t) - \beta_0 u_x(0, t) = \gamma_0(t), \ \alpha_\ell u(\ell, t) + \beta_\ell u_x(\ell, t) = \gamma_\ell(t), \ 0 < t < T& \end{aligned} \tag{2}$$

unter den Voraussetzungen $\alpha_\nu, \beta_\nu \geq 0$, $\alpha_\nu + \beta_\nu > 0$ für $\nu = 0, \ell$. Man zeige für $p, q, u_0 \in C[0, \ell]$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $\gamma_0, \gamma_\ell \in C[0, T]$ und jede klassische Lösung u (d.h. $u, u_t, u_x \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega)$)

$$f > 0 \ \text{ in } \ \Omega, \ u_0 > 0 \ \text{ in } \ [0, \ell], \ \gamma_0 > 0, \gamma_\ell > 0 \ \text{ in } \ [0, T] \Rightarrow u > 0 \ \text{ in } \ \overline{\Omega}.$$

Man folgere daraus eine a-priori Abschätzung für die Anfangsrandwertaufgabe (2).

(6 Punkte)