Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 06.05.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 4 (L^2 Abschätzungen für parabolische Aufgaben mit gemischten Randbedingungen)**.**
Verallgemeinern Sie die a-priori Abschätzung in der L^2-Norm $\|\cdot\|_2$ aus der Vorlesung für parabolische Anfangsrandwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + pu_x + qu + f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,\ell)\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), \; 0 < x < \ell \\ \alpha_0 u(0,t) - \beta_0 u_x(0,t) = \gamma_0, \; \alpha_\ell u(\ell,t) + \beta_\ell u_x(\ell,t) = \gamma_\ell \end{aligned} \tag{1}$$

unter den Voraussetzungen $\alpha_\nu, \beta_\nu \geq 0$, $\alpha_\nu + \beta_\nu > 0$ für $\nu = 0, \ell$. Man zeige, dass es zu $p, q \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|p\|_\infty \leq \alpha$ und $\|q\|_\infty \leq \beta$ zwei Konstanten C_1, C_2 mit $C_i = C_i(\alpha, \beta, \Omega)$ für $i = 1, 2$ gibt, so dass jede hinreichend glatte Lösung u von (1) eine Abschätzung

$$\|u(\cdot,t)\|_2^2 \leq C_1\left(e^{C_2 t}(\|u_0\|_2^2 + \gamma_0^2 + \gamma_\ell^2) + \int_0^t e^{C_2(t-s)}\|f(\cdot,s)\|_2^2 ds\right), \quad 0 \leq t \leq T$$

erfüllt.
Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall $\gamma_0 = \gamma_\ell = 0$ und gehe wie in der Vorlesung vor, ohne die Poincaré–Friedrichs–Ungleichung zu verwenden. Anschließend konstruiere man eine Funktion $v(x), x \in [0, \ell]$, die den inhomogenen Randbedingungen genügt, und betrachte $u(x,t) - v(x), (x,t) \in \Omega$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5 (Reihenentwicklung für die Potentialgleichung mit Neumann-Randbedingung)**.**
Man leite eine formale Reihendarstellung für die Lösung der folgenden elliptischen Randwertaufgabe her:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \quad \text{für} \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u_x(0,y) &= 0, \quad u(1,y) = 0 \quad \text{für} \quad y \in (0,1), \\ u_y(x,0) &= 0, \quad u(x,1) = \gamma(x) \quad \text{für} \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Dabei sei $\gamma \in L^2(0,1)$, und es darf ohne Beweis benutzt werden, dass sich Funktionen in $L^2(0,1)$ nach einem System von orthonormalen Eigenfunktionen eines Differentialoperators zweiter Ordnung entwickeln lassen.

(6 Punkte)